פתרון 3

1. <u>פתרון</u>

$$\begin{cases} x_1+(a-1)x_2-x_3=4 \\ ax_1+(a-1)x_2-x_3=a+3 \\ x_1+(a-1)x_2+(a-3)x_3=7 \end{cases} \xrightarrow[R_3-R_1\to R_3]{R_2-aR_1\to R_2} \begin{cases} x_1+(a-1)x_2-x_3=4 \\ 0x_1+(1-a)(a-1)x_2+(a-1)x_3=-3(a-1) \\ 0x_1+0x_2+(a-2)x_3=3 \end{cases}$$

פתרון יחיד: $a\neq 1,2$.

אין פתרון: כש $a=2$ נקבל מהמשוואה השלישית סתירה ($x_1+0x_2+0x_3=3$) ולכן במצב זה אין פתרון.

אינסוף פתרונות: $a=1$ נקבל מערכת $\begin{cases} x_1+0x_2-x_3=4 \\ 0x_1+0x_2+0x_3=0 \\ 0x_1+0x_2+-x_3=3 \end{cases}$ או אם נחליף את השורות השנייה והשלישית לקבלת צורה מדורגת $\begin{cases} x_1+0x_2-x_3=4 \\ 0x_1+0x_2+-x_3=3 \\ 0x_1+0x_2+0x_3=0 \end{cases}$ וברור שישנם אינסוף פתרונות. המשתנה החופשי הוא x_2 כי x_1 ו- x_3 משתנים מובילים (בצורה המדורגת הם המשתנים הראשונים בשורות הראשונה והשנייה כך שהמקדמים שלהם אינם אפסים) אם נציב $x_2=t$ נקבל שאוסף הפתרונות הוא מהצורה $\{(1,t,-3)\,|\,t\in R\}$.

2. א. נתון ש- $c=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ הוא פתרון של המערכת $\begin{cases} \alpha_{11}x_1+\dots+\alpha_{1n}x_n=0 \\ \alpha_{21}x_1+\dots+\alpha_{2n}x_n=0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1+\dots+\alpha_{mn}x_n=0 \end{cases}$, ולכן מתקיים $\begin{cases} \alpha_{11}\gamma_1+\dots+\alpha_{1n}\gamma_n=0 \\ \alpha_{21}\gamma_1+\dots+\alpha_{2n}\gamma_n=0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}\gamma_1+\dots+\alpha_{mn}\gamma_n=0 \end{cases}$. נכפול את כל השוויונות בסקלר λ ונקבל: $\begin{cases} \alpha_{11}\cdot\lambda\gamma_1+\dots+\alpha_{1n}\cdot\lambda\gamma_n=0 \\ \alpha_{21}\cdot\lambda\gamma_1+\dots+\alpha_{2n}\cdot\lambda\gamma_n=0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}\cdot\lambda\gamma_1+\dots+\alpha_{mn}\cdot\lambda\gamma_n=0 \end{cases}$. אולם פירושם של השיוויונות הללו הוא שה- n-יה $\lambda c=(\lambda\gamma_1,\dots,\lambda\gamma_n)$ פותרת את המערכת.

ב. יהיו $c=(\gamma_1,\dots,\gamma_n),\,d=(\delta_1,\dots,\delta_n)$ שני פתרונות של המערכת הנתונה ולכן מתקיימים השוויונות: $\begin{cases} \alpha_{11}\gamma_1+\dots+\alpha_{1n}\gamma_n=0 \\ \alpha_{21}\gamma_1+\dots+\alpha_{2n}\gamma_n=0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}\gamma_1+\dots+\alpha_{mn}\gamma_n=0 \end{cases}$, $\begin{cases} \alpha_{11}\delta_1+\dots+\alpha_{1n}\delta_n=0 \\ \alpha_{21}\delta_1+\dots+\alpha_{2n}\delta_n=0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}\delta_1+\dots+\alpha_{mn}\delta_n=0 \end{cases}$. נחבר את שתי המערכות ונקבל: $\begin{cases} \alpha_{11}(\delta_1+\gamma_1)+\dots+\alpha_{1n}(\delta_n+\gamma_n)=0 \\ \alpha_{21}(\delta_1+\gamma_1)+\dots+\alpha_{2n}(\delta_n+\gamma_n)=0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}(\delta_1+\gamma_1)+\dots+\alpha_{mn}(\delta_n+\gamma_n)=0 \end{cases}$.

כלומר, ה- n-יה $c+d=(\gamma_1+\delta_1,\dots,\gamma_n+\delta_n)$ פותרת את המערכת.

.3 <u>פתרון</u>

א. $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\-1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\-1 & 1 & 6\end{pmatrix}.$

ב. מס' העמודות בשמאלית -2, מס' השורות בימנית – 3 לכן הכפל לא מוגדר.

ג. $(1\ \ 3)\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}=(7\ \ 3)$

.4 א.

$$EF=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\a & 1 & 0\\b & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & c & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\a & 1 & 0\\b & c & 1\end{pmatrix}$$

$$FE=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & c & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\a & 1 & 0\\b & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\a & 1 & 0\\b+ac & c & 1\end{pmatrix}$$

אם a=0 או c=0 אזי $EF=FE$ אחרת $EF\neq FE$

ב.

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}4 & 4\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 8\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^5=\begin{pmatrix}2^5 & 2^5\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32 & 32\\0 & 0\end{pmatrix},\quad A^n=\begin{pmatrix}2^n & 2^n\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix}1 & b\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2b\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B^3=B^2B=\begin{pmatrix}1 & 2b\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3b\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B^5=\begin{pmatrix}1 & 5b\\0 & 1\end{pmatrix},\quad B^n=\begin{pmatrix}1 & nb\\0 & 1\end{pmatrix}$$

.5 א. כן, היא נוצרת ע"י הפעלת פעולת שורה אלמנטרית אחת על מטריצת היחידה: R_2-5R_1

ב. לא, לא נוצרת ע"י הפעלת פעולת שורה אלמנטרית אחת על מטריצת היחידה.

ג. כן, היא נוצרת ע"י הפעלת פעולת שורה אלמנטרית אחת על מטריצת היחידה: $\sqrt{3}R_2$

ד. כן, נוצרת ע"י הפעלת פעולת שורה אלמנטרית אחת על מטריצת היחידה: החלפת שורה 1עם 3.

ה. לא, לא נוצרת ע"י הפעלת פעולת שורה אלמנטרית אחת על מטריצת היחידה.

ו. כן, היא נוצרת ע"י הפעלת פעולת שורה אלמנטרית אחת על מטריצת היחידה: R_2+9R_3

.6

$$A^t=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}\quad;\quad B^t=\begin{pmatrix}1&5&3\\2&5&4\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\5&5\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20&24\\47&57\\74&90\end{pmatrix}$$

$$B^tA^t=\begin{pmatrix}1&5&3\\2&5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20&47&74\\24&57&90\end{pmatrix}$$

.7

א)

$$(AA^t-A^tA)^t=\left(AA^t+(-1)A^tA\right)^t=\left(AA^t\right)^t+(-1)(A^tA)^t=\left(A^t\right)^tA^t-A^t\left(A^t\right)^t=AA^t-A^tA$$

ב) $\left(A-A^t\right)^t=\left(A+(-1)A^t\right)^t=A^t+(-1)\left(A^t\right)^t=A^t-A=-\left(A-A^t\right)$

ג) לכל A ריבועית מתקיים $\frac{A+A^t}{2}$ סימטרית ו- $\frac{A-A^t}{2}$ אנטי סימטרית כי:

$\left(\frac{A-A^t}{2}\right)^t=\frac{A^t-(A^t)^t}{2}=\frac{A^t-A}{2}=-\frac{A-A^t}{2}$ ולכן $\frac{A-A^t}{2}$ אנטי סימטרית.

באופן דומה $\frac{A+A^t}{2}$ סימטרית.

ומתקיים $\frac{A+A^t}{2}+\frac{A-A^t}{2}=\frac{A}{2}+\frac{A^t}{2}+\frac{A}{2}-\frac{A^t}{2}=A$ ז"א כל A ריבועית הבענו בתור סכום של מטריצה סימטרית ואנטי סימטרית

.8

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}2&1&1&2&1&0&0&0\\1&2&1&2&0&1&0&0\\1&1&2&2&0&0&1&0\\2&2&1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&1&2&0&1&0&0\\2&1&1&2&1&0&0&0\\1&1&2&2&0&0&1&0\\2&2&1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{R_2-2R_1\to R_2\\R_3-R_1\to R_3\\R_4-2R_1\to R_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&1&2&0&1&0&0\\0&-3&-1&-2&1&-2&0&0\\0&-1&1&0&0&-1&1&0\\0&-2&-1&-3&0&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&1&2&0&1&0&0\\0&-1&1&0&0&-1&1&0\\0&-3&-1&-2&1&-2&0&0\\0&-2&-1&-3&0&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{R_1+2R_2\to R_1\\-R_2\to R_2\\R_3-3R_2\to R_3\\R_4-2R_2\to R_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{4}R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4+3R_3 \to R_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{2}{3}R_4 \to R_4]{\substack{R_1-3R_3 \to R_1 \\ R_2+R_3 \to R_2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_1-\frac{1}{2}R_4 \to R_1 \\ R_2-\frac{1}{2}R_4 \to R_2 \\ R_3-\frac{1}{2}R_4 \to R_3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

.9

(a לא נכון A הפיכה לכן ל $Ax=0$ יש רק את פתרון האפס, אבל B לא חייבת להיות הפיכה ולכן

למשל ניקח $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ אזי $x=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ יפתור את

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b לא נכון. A^{-1} הפיכה לכן ל $A^{-1}x=0$ יש רק פתרון האפס לעומת זאת אם למשל $B=0$ (מטריצת האפס) אזי כל וקטור יפתור את המערכת $BAx=0$.

(c לא נכון. נקח $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$BAx=b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$ABx=b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

.10

(a לא נכון $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b לא נכון $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

.11

($\Leftarrow$) A הפיכה $\Leftarrow k=1$

($\Rightarrow$) קיים k כך ש A^k הפיכה $\Leftarrow$ ז"א קיימת M כך ש $I = A^k \cdot M$. נכתוב ונקבל ש A הפיכה וההופכית שלה היא $A^{k-1} \cdot M$.