מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 6 (פתרון)

1.א' קודם כל נוכיח ש-

$$\bar{A} = ((A^c)^{\circ})^c \quad (*)$$

<u>הוכחת (*):</u> נקודה x שייכת ל-$\bar{A}$ $\Leftrightarrow$

לכל סביבתה U_x : $U_x \cap A \neq \emptyset$ $\Leftrightarrow$

כל סביבתה U_x אינה מוכלת ב-A^c $\Leftrightarrow$

נקודה x אינה נקודה פנימית של A^c $\Leftrightarrow$

$x \notin (A^c)^{\circ} \Leftrightarrow x \in ((A^c)^{\circ})^c$ ■ (*)

אם נחליף בנוסחה (*) A ל- A^c ולהפך, נקבל:

$\overline{A^c} = (A^{\circ})^c \quad (**)$,

(*)∧(**)⇐$\underline{\bar{A} \cap \overline{A^c} = (A^{\circ})^c \cap ((A^c)^{\circ})^c}$

חיתוך של שני אגפים (**) עם $\bar{A}$ נותן:

$\underline{\bar{A} \cap \overline{A^c} = \bar{A} \cap (A^{\circ})^c = \bar{A} - A^{\circ}}$

ב' $Bd(A)$ סגורה כחיתוך סגורות:

$$Bd(A) = \bar{A} \cap \overline{A^c}$$

2. <u>תשבה:</u> המרחב (X,τ) קשיר אם X קבוצה אינסופית ולא קשיר אם X קבוצה סופית.

הוכחה. יהי המרחב לא קשיר. זה יכול להיות א"א קיימות A, B - שתי תת-קבוצות פתוחות ולא ריקות בטופולוגיה τ כך ש- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$. זה אומר: שתי קבוצות A ו-$A^c = B$ סופיות בוזמנית. זה יכול להיות א"א X קבוצה סופית.

3. יהיו:

$$P_1 = \{p = (x, y.z) \in \mathbb{R}^3 |\ f_1(p) = x + y + z = 0\}$$
$$P_2 = \{p = (x, y.z) \in \mathbb{R}^3 | f_2(p) = x + y + z = 5\}$$
$$P_3 = \{p = (x, y.z) \in \mathbb{R}^3 | f_3(p) = 2x + 3y + z = 0\}$$
$$P_4 = \{p = (x, y.z) \in \mathbb{R}^3 | f_4(p) = 4x + 5y + z = 0\}$$

אזי $X = P_1 \cup P_2$ ו- $Y = P_3 \cup P_4$.

קל להוכיח שפונקציות $f_i: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ רציפות (באזרת סדרות, למשל). לכן $f_1|_{P_1}$ ו- $f_2|_{P_2}$ רציפות.

נסמן: $g_1: X \to \mathbb{R}$ כאשר $g_1 = \begin{cases} f_1|_{P_1} \\ f_2|_{P_2} \end{cases}$

אזי g_1 רציפה (ההרצאות, בנית פונקציות רציפות מפונקציות על תת-קבוצות סגורות).

אזי <u>$g_1^{-1}(\{0,5\}) = X$ מרחב לא קשיר</u> (ההרצאות, קריטריון הקשירות).

<u>תזכורת.</u> מהקורסים הקודמים או מתכון ידוע:

3.1. P_3, P_4 מישורים במרחב $\mathbb{R}^3$

3.2. כל שתי נקודות במישור אפשר לחבר על ידי קטע. אפשר להציג את הקטע כתמונה של פונקציה רציפה $\varphi\colon [0,1] \to P_i$.

במונחים של ההרצאה האחרונה: φ מ-3.2 זו מסילה בין שתי נקודות. לכן P_3, P_4 מרחבים קשירים מסילתית. ואז הם קשירים (ההרצאה).

P_3, P_4 משורים נכתכים: אם להציב במשוואות $x = y = z = 0$

$$f_3(p) = 2x + 3y + z = 0$$

$$f_4(p) = 4x + 5y + z = 0$$

רואים שהחיתוך שלהם מכיל את הנקודה o =*(0,0,0)*

זה אומר ש-$Y = P_3 \cup P_4$ מרחב קשיר (הרצאה).
מסקנה: X ו-Y לא הומאומורפיים כי X לא קשיר.