תרגיל 7

30 בנובמבר 2015

1. נתונה הקבוצה $A=\{1,2,3,4\}$.
חלק א: לגבי כל אחד מיחס השקילות הבאים מעל A מצאו את החלוקה המושרית על ידיו:
א. $R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.
ב. $R_2=\{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
ג. $R_3=\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(1,3),(3,1),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.
חלק ב: השלימו את היחסים הבאים ליחסי שקילות. כלומר, הוסיפו מספר **מינימלי** של זוגות ליחס על מנת לקבל יחס שקילות:
ד. $R=\phi$.
ה. $R=\{(1,2),(2,4)\}$.
פיתרון:
א. $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$.
ב. $\{1,2\},\{3\},\{4\}$.
ג. $\{1,2,3\},\{4\}$.
ד. $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.
ה. $R=\{(1,2),(2,1),(2,4),(4,2),(1,4),(4,1),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

2. נתונה הקבוצה $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. קבע שלוש חלוקות שונות על A ורשום את יחסי השקילות המתאימים.

3. תהי A קבוצה, ו־ R,S יחסים מעליה. הוכח או הפרך:
א. $R\cup S$ יחס שקילות.
ב. $(A\times A)\setminus R$ יחס שקילות.
ג. $T=[(A\times A)\setminus S]\cup I_A$ יחס שקילות (I_A הוא יחס השיוויון).
ד. $R\setminus S$ יחס שקילות.
ה. $R\cap S$ יחס שקילות.

ו. R^2 יחס שקילות.

פיתרון:

א. לא. $A=\{1,2,3\}, R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}, S=\{(1,1),(2,2),(3,3),(3,2),(2,3)\}$
שימו לב ש־ $(1,2)\in R\cup S\wedge(2,3)\in R\cup S$ אבל $(1,3)\notin R\cup S$, ולכן $R\cup S$ לא טרנזיטיבי ולכן לא יחס שקילות.

ב. לא. $A=\{1\}, R=\{(1,1)\}$ אזי $(A\times A)\setminus R=\phi$ ולא רפלקסיבי, ולכן לא יחס שקילות.

ג. לא. $A=\{1,2,3\}, S=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ אזי $(2,3)\in T\wedge(3,1)\in T$ כי הם לא ב־S, ובנוסף, $(2,1)\notin T$ כי הוא ב־S, ולכן T לא טרנזיטיבי ולכן לא יחס שקילות.

ד. לא. $A=\{1\}, R=S=\{(1,1)\}$ אזי $R\setminus S=\phi$ ולא רפלקסיבי, ולכן לא יחס שקילות.

ה. כן. רפלקסיבי: יהי $a\in A$, אזי $(a,a)\in R\wedge(a,a)\in S$ ולכן $(a,a)\in R\cap S$.

סימטרי: נניח $(a,b)\in R\cap S$ אזי $(a,b)\in R\wedge(a,b)\in S$ ולכן (מסימטריות של R,S שהם יחסי שקילות) $(b,a)\in R\wedge(b,a)\in S$ ולכן $(b,a)\in R\cap S$.

טרנזיטיבי: $(a,b)\in R\cap S\wedge(b,c)\in R\cap S\Rightarrow((a,b)\in R\wedge(a,b)\in S)\wedge((b,c)\in R\wedge(b,c)\in S)\Rightarrow((a,b)\in R\wedge(b,c)\in R)\wedge((a,b)\in S\wedge(b,c)\in S)\Rightarrow(a,c)\in R\wedge(a,c)\in S\Rightarrow(a,c)\in R\cap S$.

מעבר ראשון הגדרת חיתוך. מעבר שני אסוציאטיביות של "וגם". מעבר שלישי מטרנזיטיביות של R,S שהם בעצמם יחסי שקילות. מעבר רביעי הגדרת חיתוך.

ו. כן. ראינו שכאשר R רפלקסיבי אז $R\subseteq R^2$ וכאשר R טרנזיטיבי אז $R^2\subseteq R$.
כיון ש־R יחס שקילות הוא גם רפלקסיבי וגם טרנזיטיבי, ולכן קיבלנו הכל דו כיוונית המניבה $R^2=R$ שהוא יחס שקילות

4. תהי A קבוצה כך ש־ $|A|=n\in\mathbb{N}$ ו־ $B\subseteq A$. נסמן $|B|=m\leq n$. נגדיר יחס R מעל $P(A)$ בצורה הבאה:

$$R=\{(C,D)\mid C\cap B=D\cap B\}$$

ראינו בתרגול ש־R יחס שקילות. הוכח: מספר מחלקות השקילות של R הוא 2^m.

פתרון:

מחלקות השקילות הם כל התתי קבוצות של B־

כל תת קבוצה של B מגדירה מחלקת שקילות שונה כי $C,D\subseteq B$ $C\neq D$ אזי $C\cap B\neq D\cap B$ ולכן הם מחלקות שונות.

מצד שני:

כל מחלקת שקילות שקולה לתת קבוצה של B כי נניח ש־ $C \in P(A)$ אזי $[C]_R = \{D \in P(A) \mid C \cap B = D \cap B\}$ ובפרט $C \cap B \subseteq B$ ולכן נמצא ב־$[C]$ לכן כל מחלקת שקילות מתאימה לתת קבוצה של B.

לכן מספר מחלקות השקילות הוא כגודל של $|P(B)| = 2^{|B|} = 2^m$.