<u>אנליזה מודרנית – פתרון תרגיל בית 8</u>

1. בנפרד

2. f רציפה בהחלט שכן מתקיימת נוסחת ניוטון-לייבניץ $\sqrt{x}=\int_0^x \frac{1}{2\sqrt{t}}dm(t)$ ניתן להוכיח שוויון זה עם התכנסות מונוטונית: הסדרה $g_n(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}I_{\left[\frac{1}{n},x\right]}(t)$ היא סדרה עולה של פונקציות מדידות לבג השואפת בעלייה אל $f'=\frac{1}{2\sqrt{t}}$ בקטע $t\in[0,x]$. משפט ההתכנסות המונוטונית נותן

$$\int_0^x \frac{1}{2\sqrt{t}}dm(t)=\lim_{n\to\infty}\int_0^x g_n dm(t)=\lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^x \left(\sqrt{t}\right)'dm(t)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{n}}=\sqrt{x}$$

כאשר השתמשנו במשפט לבג הנותן שקילות עם אינטגרל רימן בקטע סגור עבור פונקציה חסומה.

לגבי g, נגדיר $h(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$, חישוב הנגזרת ע"פ ההגדרה נותן $h'(0)=0$, ובכל נקודה אחרת $3\geq\left|2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right|=\left|h'(x)\right|$ כך שבסך הכל הנגזרת חסומה בקטע $[0,1]$ ומכאן ש h מקיימת את תנאי ליפשיץ ומכאן ש- h רציפה בהחלט בקטע. וע"פ הטענה האומרת כי גם $|h|(=g)$ רציפה בהחלט (שנובעת בקלות מאי-שוויון המשולש "ההפוך") מקבלים כי g רציפה בהחלט.

ההרכבה היא $f(g(x))=x\sqrt{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}$. וסדרת החלוקות $P_N:\frac{2}{\pi}>\frac{2}{2\pi}>\frac{2}{3\pi}>\frac{2}{4\pi}>\ldots\frac{2}{N\pi}$ נותנת סדרה $v(f,P_N)$ שגדלה בקצב הרמוני (חישוב דומה למה שראינו בתרגול). מכאן כי $T_0^1[f\circ g]=+\infty$ כלומר $f\circ g$ אינה בעלת השתנות חסומה, ולכן גם אינה רציפה בהחלט.

3. נניח כי $f,g\in BV([a,b])$ (ז"א $T_a^b[f],T_a^b[g]<\infty$) נוכיח כי גם $f+g\in BV([a,b])$.
ובכן, לכל חלוקה $P\|[a,b]$ מתקיים

$$v(f+g,P)=\sum_{k=1}^n\left|(f+g)(x_k)-(f+g)(x_{k-1})\right|\leq\sum_{k=1}^n\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|+\sum_{k=1}^n\left|g(x_k)-g(x_{k-1})\right|$$
$$=v(f,P)+v(g,P)\leq T_a^b[f]+T_a^b[g]$$

ניקח sup על כל החלוקות לקבל $\sup_{P\|[a,b]}v(f+g,P)\leq T_a^b[f]+T_a^b[g]$ או
$T_a^b[f+g]\leq T_a^b[f]+T_a^b[g]<\infty$ כדרוש.

לגבי כפל בסקלר, פשוט לראות שלכל חלוקה $v(cf,P)=|c|v(f,P)\leq|c|T_a^b[f]$ ולכן $T_a^b[cf]\leq|c|T_a^b[f]<\infty$.

לגבי כפל פונקציות: נניח כי $f_{1,2}\in BV([a,b])$ ע"פ משפט הפירוק של ז'ורדן נוכל לרשום $f_1=g_1-h_1, f_2=g_2-h_2$ כאשר $g_{1,2},h_{1,2}$ עולות. מכאן $f_1f_2=g_1g_2+h_1h_2-(g_1h_2+g_2h_1)$ מיוצגת גם כהפרש שתי פונקציות עולות – ולכן בעלת השתנות חסומה.

4.

א. הפונקציה $f=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ מראה את הדרוש, שכן היא רציפה, ונגזרתה רציפה בכל קטע מהצורה $[\varepsilon,1]$ (וע"פ תוצאה מהתרגול היא גם רציפה בהחלט שם).

ב. f עולה, נוכיח כי f מקיימת את נוסחת ניוטון לייבניץ $f(x)-f(0)=\int_0^x f'dm$. לכל $\varepsilon\in(0,1)$ קטן דיו נוכל לרשום $\int_0^x f'dm=\int_0^\varepsilon f'dm+\int_\varepsilon^x f'dm$ ניקח גבול על שוויון זה לקבל $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^x f'dm=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_0^\varepsilon f'dm+\int_\varepsilon^x f'dm\right]$ או $\int_0^x f'dm=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_0^\varepsilon f'dm+\int_\varepsilon^x f'dm\right]$ ע"פ משפט הגזירה של לבג $\int_0^\varepsilon f'dm\le f(\varepsilon)-f(0)$ וזה שואף לאפס כאשר אפיסלון שואף לאפס. נשארנו עם $\int_0^x f'dm=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^x f'dm$. בגלל ש-f רציפה בהחלט בקטע $[\varepsilon,x]$ מתקיימת שם נוסחת ניוטון לייבניץ $\int_\varepsilon^x f'dm=f(x)-f(\varepsilon)$ ובסך הכל $\int_0^x f'dm=\lim_{\varepsilon\to 0^+}f(x)-f(\varepsilon)=f(x)-f(0)$ (השוויון האחרון נכון כי f רציפה).