תירגול למורים בש תשפב סמסטר ב

21 ביוני 2022

1. האם מתכנס $\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{dx}$
פתרון: נשווה ל $\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\ln(x)}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\ln(x)=\infty$$

כלומר $\frac{\ln(x)}{x}$ גדול גבולית מ $\frac{1}{x}$ שמתבדר ולכן גם האינטגרל שלנו מתבדר (שני הפונקציות חיוביות בקרן $[1,\infty)$).

2.

$$[\arctan(x)]'=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

זה מסתמך על טור הנדסי (עבור $|q|<1$) ש

$$\frac{1}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty}q^n$$

אצלנו $q=-x^2$. קיבלנו

$$[\arctan(t)]'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$$

ונעשה אינטגרל $\int_0^x$ לקבל

$$\arctan(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=1-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$$

אנחנו יודעים שהמקדם של x^5 שווה ל $\frac{f^{(5)}(0)}{5!}$ ולכן עבור $f(x)=\arctan(x)$ מתקיים

$$\frac{f^{(5)}(0)}{5!}=\frac{1}{5}$$

כעת אפשר להציב

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{2n+1}=1-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5-\cdots$$

3. תשעז מועד א ב"ש שאלה 4ב. חשבו את

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!-1}{2^n\cdot n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{n!}{2^n n!}-\frac{1}{2^n n!}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{2^n n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}$$

נחשב כל סכום בנפרד:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{2^n n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}=2$$

הסיגמה השניה

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

מחושבת בעזרת טור הטילור

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

פשוט זה הצבה $x=\frac{1}{2}$ נקבל

$$e^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}$$

ולכן התשובה הסופית היא

$$2-e^{\frac{1}{2}}=2-\sqrt{e}$$

4. מתי אפשר לחלק סיגמות וכאלה דברים? כדאי לבדוק בסכום סופי אם זה עובד ולשער שזה עובד גם עם סיגמה. למשל

$$[a_1-b_1]+[a_2-b_2]+[a_3-b_3]=[a_1+a_2+a_3]-[b_1+b_2+b_3]$$

לעומת

$$\frac{\sum_{n=1}^{3}a_n}{\sum_{n=1}^{3}b_n}=\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}\neq\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}=\sum_{n=1}^{3}\frac{a_n}{b_n}$$

אפשר לעשות

$$\frac{\sum_{n=1}^{3}a_n}{\sum_{n=1}^{3}b_n}=\sum_{n=1}^{3}\frac{a_n}{\sum_{k=1}^{3}b_k}=\frac{a_1}{b_1+b_2+b_3}+\frac{a_2}{b_1+b_2+b_3}+\frac{a_3}{b_1+b_2+b_3}$$

מה עם כפל?

$$\left(\sum a_n\right)\cdot\left(\sum b_n\right)\neq\sum a_n b_n$$

למשל

$$(a_1+a_2)(b_1+b_2)\neq a_1b_1+a_2b_2$$

אפשר גם להוציא כפל בקבוע משותף, למשל

$$\sum(c\cdot a_n)=c\cdot\left(\sum a_n\right)$$

5. תשעז מועד א ,בש: חשבו את הגבול של

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k+n}$$

פתרון: נרצה להציג את a_n כסכום רימן של פונקציה $f(x)$ שרציפה ב $[0,1]$ ואז

$$a_n\to\int_0^1 f(x)\mathrm{dx}$$

ננסה

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k+n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{\frac{k}{n}+1}=n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\frac{k}{n}+1}=n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$$

עבור $f(x)=\frac{1}{x+1}$ ולכן

$$a_n=n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)\to\infty\cdot\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{dx}=\infty$$

דרך נוספת - בעזרת חדוא 1 בלבד:

$$n\cdot\left(\frac{n}{n+n}\right)\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k+n}=\frac{n}{1+n}+\frac{n}{2+n}+\cdots+\frac{n}{n+n}$$

כלומר קיבלנו

$$n\cdot\frac{1}{2}\leq a_n$$

ומכיוון ש $n\cdot\frac{1}{2}\to\infty$ גם $a_n\to\infty$ לפי חצי-סנוויץ.

הערה כללית: כל סיגמה $\sum_{k=1}^{n}a_n$ אפשר לחסום בין n כפול המחובר הקטן לבין n כפול המחובר הגדול. אם מהאינפומציה הזאת ניתן לפתור את התרגיל (כמו שראינו במקרה הזה) - סבבה. חדוא 2 נותן כלי שמתמודדת במקרה שחסמים אלו לא עוזרים. למשל:

$$\frac{1}{2}=n\cdot\left(\frac{1}{n+n}\right)\leq a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}\leq n\cdot\left(\frac{1}{1+n}\right)=\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\to 1$$

ופה אפשר להשתמש בסכומי רימן - כך:

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)+1}\to\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{dx}=\ln|1+x|\Big|_0^1=\ln(2)$$

6. האם כאשר f יורדת אז האינטגרל $\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ שלילי? לא בהכרח. למשל $f(x)=10-x$ פונקציה יורדת אבל

$$\int_0^1(10-x)\,\mathrm{dx}=\left[10x-\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^1=10-\frac{1}{2}=9\frac{1}{2}$$

מה כן? אם f מתחת לציר x אז האינטגרל המסוים יהיה שלילי. אם f מעל לציר x השטח חיובי. אם היא חלק מעל ציר x וחלק מתחת לציר x - צריך לחשב ולראות אם יוצא חיובי/שלילי.

האם הכיוון ההפוך נכון - אם ידוע ש $\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ חיובי האם זה אומר ש $f\geq 0$? לא! למשל

$$f(x)=x$$

ונסתכל על

$$\int_{-1}^{2}x\mathrm{dx}=\frac{2^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2}=\frac{3}{4}$$

7. פונקציה $f(x)$ גזירה ומקיימת $f(x)\geq 0$ לכל x. נגדיר

$$g(x)=x\cdot\int_0^x f$$

(א) הוכיחו כי g מונוטונית עולה ב $[0,\infty)$.
פתרון: g היא מכפלה של x עם $\int_0^x f$

$$g'(x)=1\cdot\int_0^x f+x\cdot f(x)$$

כאשר הסתמכנו על כך ש $\left(\int_0^x f\right)'=\left\{[F(x)-F(0)]'\right\}=f(x)$. בקרן $[0,\infty)$ מתקיים ש:

i. x אי שלילי.
ii. $f(x)$ אי שלילי (נתון בשאלה).
iii. 1 חיובי.
iv. $\int_0^x f$ אי שלילית כי $f\geq 0$ ולכן האינטגרל שלה יהיה אי שלילי.

ולכן $g'\geq 0$ בקרן זו כמפלה וסכום של אי-שליליים ולכן g עולה.

(ב) **נניח בנוסף** f **עולה**. הוכיחו ש g מחייכת.
פתרון: באופן דומה נראה ש $g''\geq 0$ ב $[0,\infty)$. נעשה זאת ע"י גזירה ישירה של

$$g'(x)=1\cdot\int_0^x f+x\cdot f(x)$$

ונקבל

$$g''(x)=f(x)+1\cdot f(x)+x\cdot f'(x)=2f(x)+x\cdot f'(x)$$

וזה אי שלילי כי: $f(x)\geq 0$ נתון, x אי שלילי. ובנוסף, $f'(x)\geq 0$ כי הוסיפו לנו נתון ש f עולה ולכן f' אי-שלילית.

8. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ונחשב

$$\int_1^{10^{100}}\frac{1}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]\Big|_1^{10^{100}}=-\frac{1}{10^{100}}-(-1)>0$$

9.

$$\lim_{x\to-\infty}x+\ln\left(x^2-3\right)=\lim_{x\to(-\infty)}x\left[1+\frac{\ln\left(x^2-3\right)}{x}\right]=\{-\infty\,(1+0)\}=-\infty$$

נחשב חישוב עזר להצדיק את האדום:

$$\lim_{x\to(-\infty)}\frac{\ln\left(x^2-3\right)}{x}=\left\{\frac{\infty}{\infty},\text{לופיטל}\right\}=\lim_{x\to(-\infty)}\frac{\frac{2x}{x^2-3}}{1}=0$$

(א) אזהרה - מה אסור לעשות!

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\frac{x^2}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot 1-\frac{1}{x^2}=0$$

זה לא נכון!! הגבול שווה $\frac{1}{3}$. מה הבעיה? אסור להחליף חלק מהביטוי בגבול שלו ולהשאיר את שאר הביטוי כמו שהוא. ברגע שמחליפים חלק מביטוי בגבול שלו - צריך להחליף את כל חלקי הביטוי בגבולות שלהם.

10. נתון f המקיימת $f''>0$ לכל $x\geq 0$.

(א) הוכיחו/הפירכו:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

פתרון: נחפש פונקציה שהיא גם שלילית וגם עולה (ממש). אם נמצא כזאת, נגדיר אותה להיות f' ואז: כיוון שהיא עולה ממש נקבל שהנגזרת שלה f'' חיובית. כיוון שהיא גם שלילית נסיק ש f יורדת ולכן בפרט הגבול של f באינסוף לא יהיה אינסוף. למשל

$$f'(x) = -e^{-x} = -\frac{1}{e^x} < 0$$

והיא גם עולה. ואכן:

$$f''(x) = e^{-x} > 0$$

אבל

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$$

(ב) נתון בנוסף כי $f'(0) = 1$. הוכיחו ש

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

פתרון: (הכל מתייחס לקרן $[0,\infty)$) מהנתון ש $f'' > 0$ נסיק ש f' עולה. נתון גם בסעיף זה ש $f'(0) = 1$ ולכן בקרן נסיק ש $f'(x) \geq f'(0) = 1$.

בקטע $[0,x]$ הפונקציה f רציפה וגזירה ולכן לפי משפט לגרז' קיים $0 < c < x$ כך ש

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c)$$

כיוון ש $f'(c) \geq 1$ נקבל ש

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} \geq 1$$

ולכן

$$f(x) \geq x + f(0)$$

לסיום:

$$\lim_{x\to\infty} x + f(0) = \{\infty + f(0)\} = \infty$$

ולכן לפי חצי - סנוויץ גם

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

11. קבעו האם מתכנס $\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{dx}$.

פתרון: נשים לב שב $[1,\infty)$ הפונקציה $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ חיובית ונוכל להשוואת עם פונקציות מהצורה

$$\frac{1}{x^\alpha}$$

ננסה:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \left\{\frac{0}{0}, \text{לופיטל}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1$$

ולכן האינטגרל של $\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{dx}$ חבר של $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \mathrm{dx}$ שידוע שמתכנס.

12. חשבו את הגבול:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(n+k) - \ln(n)}{n}$$

פתרון: ננסה להציג את a_n כסכום רימן בלה בלה בלה.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)-\ln(n)}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

שזה שואף (כי $\ln(1+x)$ רציפה ב $[0,1]$) ל

$$\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{dx}$$

נחשב קודם קדומה של $\ln(1+x)$:

$$\int\ln(1+x)\,\mathrm{dx}=\left\{\begin{array}{ccc} f=\ln(1+x) & \Rightarrow & f'=\frac{1}{1+x} \\ g'=1 & & g=x\end{array}\right\}=$$

$$=x\cdot\ln(1+x)-\int\frac{x}{1+x}\mathrm{dx}=x\cdot\ln(1+x)-\int\frac{x+1-1}{1+x}\mathrm{dx}=$$

$$=x\cdot\ln(1+x)-\int 1-\frac{1}{1+x}\mathrm{dx}=x\ln(1+x)-[x-\ln(1+x)]$$

נחזור לפתרון הסופי של השאלה

$$\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{dx}=\ln(1)-[1-\ln(2)]=\ln(2)-1$$

13. איך נבוק חוקי חיסור lnים? נבדוק בדוגמה פשוטה

$$\ln\left(e^2\right)=2,\ln\left(e^3\right)=3$$

$$\ln\left(e^3\right)-\ln\left(e^2\right)=3-2=1=\ln(e)$$

14. חשבו

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{3^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

אנחנו רואים לפנינו הצבה של $x=\frac{2}{3}$ בטור

$$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^n$$

נתחיל בלהסתכל בטור ההנדסי:

$$(1-x)^{-1}=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

נגזור את שני האגפים ונקבל

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1}$$

ועכשיו נכפיל ב x בודד לקבל

$$\frac{x}{(1-x)^2}=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x\cdot x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n}$$

ולכן כמעט לסיום

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n}$$

ונציב $x=\frac{2}{3}$ לקבל את התשובה הסופית:

$$\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)\right)^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)}=2$$

15. חשבו את $\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)$ עד כדי שגיאה $\frac{1}{100}$.
פתרון:

$$[\ln(1+x)]'=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

כלומר

$$[\ln(1+t)]'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$$

נעשה אינטגרל על שני האגפים $\int_0^x$ לקבל

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

ולכן, נציב $x=\frac{1}{2}$ לקבל

$$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

נקרב את הערך בעזרת

$$\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

(כאשר k נבחר עוד מעט). השגיאה היא

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

שהוא טור לייבניץ ולכן נחפש את האיבר הראשון שקטן מ $\frac{1}{100}$ (בערכו המוחלט). עבור $n=4$ נקבל

$$\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}<\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{25}=\frac{1}{100}$$

ולכן, קירוב שיענה על השאלה הוא

$$\sum_{n=0}^{3}(-1)^n\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{77}{192}$$

16. מבחן 035582 מועד חורף 2020.

4. נתונה הפונקציה $f(x)=e^{\left(\frac{a}{x-1}\right)}+c$. a ו־ c הם פרמטרים.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון: משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$ היא $y=1$,

הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה־ y בנקודה $\left(0\,,e^{-4}\right)$.

ב. מצא את הערך של c ואת הערך של a .

ג. **(1)** מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(2) מה הם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה)?

לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול יחידה בנקודה שבה $x=-1$.

ד. **(1)** סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) לאילו ערכי k הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$? נמק.

ה. העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת הפיתול שלה. המשיק עובר בראשית הצירים.

הסבר מדוע השטח הנמצא ברביע השני ומוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה־ y

קטן מ־ $\frac{1}{2}e^{-2}$.

פתרון:

$$f(x)=e^{\frac{a}{x-1}}+c$$

כאשר a,c פרמטרים.

(א) תחום הגדרה: $x\neq 1$.

יש אסימפטוטה אופקית $y=1$ ובנוסף f חותכת את ציר y בנקודה $\left(0,e^{-4}\right)$.

(ב) מצאו a,c: נתון

$$1=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{a}{x-1}}+c=\left\{e^{\frac{a}{\infty}}+c\right\}=1+c$$

ולכן $c=0$. בנוסף

$$e^{-4}=f(0)=e^{-a}$$

ולכן $a=4$.

(ג)

$$f(x)=e^{\frac{4}{x-1}}$$

i. תחום עליה/ירידה: נגזור

$$f'(x)=e^{\frac{4}{x-1}}\cdot\left(\frac{-4}{(x-1)^2}\right)<0$$

כיוון ש f לא מוגדרת ב $x=1$ נסיק שתחומי הירידה הן

$$(-\infty,1)\,,(1,\infty)$$

ii. חיוביות/שליליות:

$$\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{4}{x-1}}=\left\{e^{\frac{4}{0^+}}=e^{\infty}\right\}=\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{4}{x-1}}=\left\{e^{\frac{4}{0^-}}=e^{-\infty}\right\}=0$$

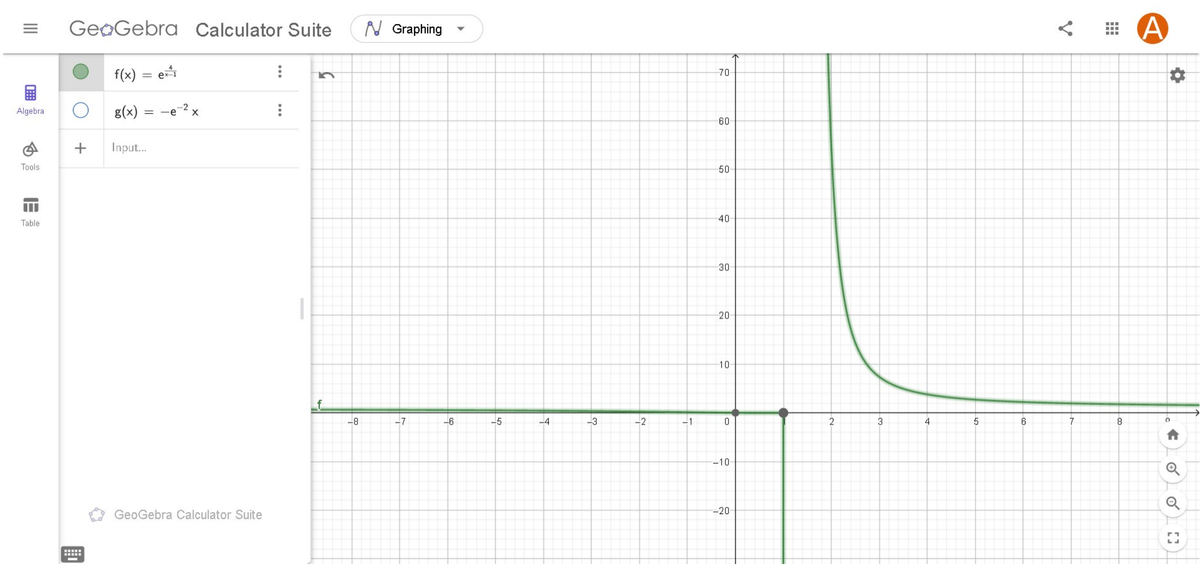
לכן f חיוביות לכל $x\neq 1$ (נימוק: בקטע $(-\infty,1)$ היא יורדת והגבול ב 1^-הוא 0 ולכן ב $(-\infty,1)$היא גדולה שווה ל 0. באופן דומה ב $(1,\infty)$ היא יורדת והגבול באינסוף הוא 1 ולכן ב $(1,\infty)$ הפונקציה גדולה שווה ל 1).

(ד) נתון בנוסף של f יש נקודת פיתול יחידה ב $x=-1$. נגזור פעמים לוודא

$$f'(x)=e^{\frac{4}{x-1}}\cdot\left(\frac{-4}{(x-1)^2}\right)$$

$$f''(x)=e^{\frac{4}{x-1}}\cdot\left(\frac{-4}{(x-1)^2}\right)^2+e^{\frac{4}{x-1}}\frac{8}{(x-1)^3}$$

אכן $f''(-1)=0$.



i. סרטטו סקיצה -

ii. לאילו ערכי k, הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה. מהסקיצה רואים שזה קורה עבור $0<k<1$ (בצד שמאל של ציר x) או $1<k$(בצד ימין של ציר x). כלומר לכל k חיובי שונה מ 1.

(ה) נמצא משיק בנקודת הפיתול ($x=-1$) שעובר בראשית הצירים. מה השיפוע?

$$f'(-1)=e^{\frac{4}{-2}}\cdot(-1)=-e^{-2}$$

כלומר המשיק הוא

$$g(x)=-e^{-2}x$$

טענה

$$\int_{-1}^{0} |f(x) - g(x)| \,\mathrm{dx} < \frac{1}{2}e^{-2} = \int_{-1}^{0} g(x)\mathrm{dx}$$

הוכחה: נרצה להראות ש $|g(x) - f(x)| = |f(x) - g(x)| < g(x)$ או לחילופין להראות ש $f(x) < g(x)$ (ומכיוון ש $0 < f(x)$ נקבל ש $g(x) - f(x) < g(x)$) לכל $-1 < x < 0$ נתון שיש נקודת פיתול יחידה ב $x = -1$ ולכן הקימור/קעירות ב $[-1, 0]$ אותו דבר של הפונקציה $f(x)$. נציב ערך שרירותי ב $f''(x)$, למשל $f''(0)$ ונקבל ש

$$f''(0) = e^{\frac{4}{-1}} \cdot \left(\frac{-4}{(-1)^2}\right)^2 + e^{\frac{4}{-1}} \frac{8}{(-1)^3} = e^{-4}\left[16 - 8\right] > 0$$

קיבלנו ש f מחייכת ב $[-1, 0]$ ולכן גדולה מכל משיק שמה ובפרט המשיק שלנו $g(x)$. כלומר

$$g(x) > f(x)$$

בקטע $[-1, 0]$ כמו שרצינו.