פתרון תרגיל 3 אינפי 3

.1

(א)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} y = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \lim_{(x,y)\to(0,0)} y =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$$

(ב) נתקדם על הישר $x = y = z$ ונקבל

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{3x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3x}$$

גבול זה לא קיים ולכן גם לפונקציה המקורית אין גבול.

(ג) נציב $t = x^2 + y^2 + 1$ ונקבל

$$\lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{t}-1}{t-1} = \lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{t}-1}{(\sqrt{t}-1)(\sqrt{t}+1)} = \lim_{t\to 1} \frac{1}{(\sqrt{t}+1)} = \frac{1}{2}$$

לכן הגבול הוא $\frac{1}{2}$.

(ד)

$$|\frac{xy}{\sqrt{x^2+3y^2}}| \le \frac{|xy|}{\sqrt{x^2}} = |y| \to 0$$

ולכן

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+3y^2}} = 0$$

.2 לא. אם נתקדם על הישר $x = y$ נקבל ש $f(x,y) = 0$ לאורך ישר זה. אבל אם נתקדם על הישר $y = 2x$ נקבל ש

$$f(x,y) = \frac{x}{2x} - \frac{2x}{x} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \neq 0$$

לכן אין שום a שנוכל לבחור כך השפונקציה תהיה רציפה.

.3

(א) לא. נתקדם לאורך הישר $y = \sqrt{x}$ ונקבל

$$\frac{xy^2}{x^2+y^4} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

ולכן f לא רציפה.

(ב) כן. מפני ש

$$|(x^4+y^4)\ln(x^2+y^2)| \le (x^4+2x^2y^2+y^4)\ln(x^2+y^2) = (x^2+y^2)^2\ln(x^2+y^2)$$

נציב $t = x^2 + y^2$ ואז

$$\lim_{t\to 0^+} t^2 \ln t = 0$$

ולכן גם הגבול המקורי הוא 0 והפונקציה רציפה.

4. נוכיח ראשית את הטענה הבאה: עבור כל קבוצה $P \subseteq \mathbb{R}^m$

$$f^{-1}(\mathbb{R}^m \backslash P) = \mathbb{R}^n \backslash f^{-1}(P)$$

הוכחה: צד $\subseteq$: אם $x \in f^{-1}(\mathbb{R}^m\backslash P)$ אז $f(x) \in \mathbb{R}^m\backslash P$ ולכן $f(x) \notin P$ לכן בהכרח $x \notin f^{-1}(P)$ ולכן $x \in \mathbb{R}^n\backslash f^{-1}(P)$. כעת נעבור לצד $\supseteq$: אם $x \in \mathbb{R}^n\backslash f^{-1}(P)$ אז $x \notin f^{-1}(P)$, היות ו f מוגדרת על כל $\mathbb{R}^n$, $f(x)$ קיים. לכן $x \notin f^{-1}(P)$ גורר ש $f(x) \notin P$ ולכן $f(x) \in \mathbb{R}^m\backslash P$ ולכן $x \in f^{-1}(\mathbb{R}^m\backslash P)$. מש"ל. כעת נעבור להוכחת המשפט עצמו. היות ואנחנו יודעים שפונקציה היא רציפה אם ורק אם המקור של כל קבוצה פתוחה היא קבוצה פתוחה, נוכיח כי המקור של כל קבוצה פתוחה הוא קבוצה פתוחה אם ורק אם המקור של כל קבוצה סגורה הוא קבוצה סגורה.

(א) צד $\Rightarrow$: נניח שאנו יודעים שהמקור של כל קבוצה פתוחה הוא קבוצה פתוחה, נוכיח את אותה טענה עבור קבוצה סגורה. תהי P קבוצה סגורה, אזי $\mathbb{R}^m\backslash P$ היא קבוצה פתוחה ולכן

$$f^{-1}(\mathbb{R}^m \backslash P) = \mathbb{R}^n \backslash f^{-1}(P)$$

גם קבוצה פתוחה. ולכן משלימתה, שהיא $f^{-1}(P)$ היא קבוצה סגורה.

(ב) צד $\Leftarrow$: נניח שאנו יודעים שהמקור של כל קבוצה סגורה הוא קבוצה סגורה, נוכיח את אותה טענה עבור קבוצה פתוחה. תהי P קבוצה פתוחה, אזי $\mathbb{R}^m\backslash P$ היא קבוצה סגורה ולכן

$$f^{-1}(\mathbb{R}^m \backslash P) = \mathbb{R}^n \backslash f^{-1}(P)$$

גם קבוצה סגורה. ולכן משלימתה, שהיא $f^{-1}(P)$ היא קבוצה פתוחה.

5. היות ו

$$||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

היא הרכבה,חיבור והכפלה של פונקציות רציפות, ברור שהיא רציפה.