אלגברה ליניארית 1 – סמסטר קיץ

תרגיל 2- פתרונות

1. א. 0

ב. $\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$

2.

א. נסמן: $e_i$ וקטור עם 1 במקום הi ו0 בשאר המקומות

$R_i(A)$ השורה הi של המטריצה A

$C_i(A)$ העמודה הi של המטריצה A

$C_y(E_{kl}) = \begin{cases} e_k^t & y = l \\ 0 & y \neq l \end{cases}$ $\quad R_x(E_{ij}) = \begin{cases} e_j & x = i \\ 0 & x \neq i \end{cases}$

ולכן $\begin{cases} e_j e_k^t & x = i, y = l \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} = (E_{ij}E_{kl})_{xy} = R_x(E_{ij})C_y(E_{kl})$

קל לבדוק ש $e_j e_k^t = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$ ולכן סה"כ מתקיים הדרוש.

ב. לפי כפל בלוקים (או עמודה) $C_x(AE_{ij}) = AC_x(E_{ij}) = \begin{cases} Ae_i^t & x = j \\ 0 & x \neq j \end{cases}$

ולפי כפל עמודה קל לראות ש $Ae_i^t = C_i(A)$

ג. באותו אופן: $R_x(E_{ij}A) = R_x(E_{ij})A = \begin{cases} e_i A & x = i \\ 0 & x \neq i \end{cases}$ ו- $e_i A = R_i(A)$

ד. תוצאה של ב+ג

3. א. $\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

ג. אם a≠b וגם a≠0 אז $\frac{1}{a(a-b)}\begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ -a & a & 0 \\ 0 & -a & a \end{pmatrix}$

אחרת המטריצה לא הפיכה.

4. א. למשל $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

ב. נכפול במטריצה ההפכית משמאל: $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}\ \backslash A^{-1}$

$B = IB = IC = C$

ג. למשל : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ד. למשל: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

ה. $\Leftarrow$ AB סימטרית ולכן $AB = (AB)^t = B^tA^t = BA$

$\Rightarrow$ A, B מתחלפות ולכן: $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = B^{\mathrm{t}}\mathrm{A}^{\mathrm{t}} = (\mathrm{AB})^{\mathrm{t}}$

5.

* לפי הגדרת השחלוף $(A)_{ii} = (A^t)_{ii}$ איברי האלכסונים שווים ולכן $tr(A) = tr(A^t)$.

* $trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad , \quad trB = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$

$trA + trB = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = tr(A+B)$ $\Longrightarrow$

* דוגמא נגדית I=B=A $\quad tr(AB) = tr(I) = n \neq n^2 = tr(I)tr(I) = tr(A)tr(B)$

* $\alpha tr(A) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{ii} = tr(\alpha A)$

* דוגמא נגדית A=I $\quad tr(I^{-1}) = trI = n \neq \frac{1}{n} = \frac{1}{\mathrm{tr(I)}}$

6.

א. $AA^3 = A^3A = A^2A^2 = (-I)(-I) = I$ $\Longleftarrow$ $A^{-1} = A^3$

ב. לא נכון לפי יחידות המטריצה ההופכית. אפשר גם דוג' נגדית: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$

ג. לא נכון לפי א

.7

א.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+0+0... & \cdots & a_{11}b_{1n}+\dots a_{1n}b_{nn} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

ולכן מטריצות משולשיות עליונות סגורות לכפל.

ב. אם A ו-B הפיכות אז AB הפיכה כי $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$

ג. לא סגור לכפל. למשל: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 21 & 18 \\ 28 & 37 & 30 \\ 24 & 30 & 36 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$

ה. $\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\beta\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha I * \beta I = (\alpha\beta) I$