מתמטיקה מד"ר תשפג מועד א

1. מצאו פתרון למד"ר $y' + y = xy^2$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0) = \frac{1}{2}$.

פתרון: זוהי מד"ר ברנולי מהצורה

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

עבור $p = 1, q = x, n = 2$. נציב $z = y^{1-n} = y^{-1}$ ונקבל את המד"ר

$$z' + (1-n)\, p(x)z = (1-n)\, q(x)$$

או מפורשות

$$z' - z = -x$$

שהינה מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $z' + a(x)z = b(x)$ עבור $a(x) = -1, b(x) = -x$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)} \left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx} \right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. למשל נבחר $A(x) = -x$ ואז

$$z(x) = e^x \left(C - \int xe^{-x}\mathrm{dx} \right)$$

נחשב את הקדומה של xe^{-x} על ידי אינטגרציה בחלקים

$$\int xe^{-x}\mathrm{dx} = \left\{ \begin{array}{ccc} f = x & \Rightarrow & f' = 1 \\ g' = e^{-x} & & g = -e^{-x} \end{array} \right\} = -xe^{-x} + \int e^{-x}\mathrm{dx} = e^{-x}\left(-x-1\right)$$

ונקבל ש

$$z(x)=e^{x}\left(C-\int xe^{-x}\mathrm{dx}\right)=e^{x}\left(C-e^{-x}\left(-x-1\right)\right)=e^{x}C+(x+1)$$

או

$$y(x)=z^{-1}=\frac{1}{e^{x}C+(x+1)}$$

נציב תנאי התחלה

$$\frac{1}{2}=y(0)=\frac{1}{e^{0}C+(0+1)}=\frac{1}{C+1}$$

לכן $C+1=2$ ו $C=1$. התשובה הסופית היא

$$y(x)=\frac{1}{e^{x}+(x+1)}.$$

2. מצאו פתרון למד"ר $2xyy'=y^2-1$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1)=2$.

פתרון: נחלק ב x, y^2-1 לקבל:

$$\frac{2y}{y^2-1}y'=\frac{1}{x}$$

או בכתיב שקול

$$\frac{2y}{y^2-1}\mathrm{dy}=\frac{1}{x}\mathrm{dx}$$

שהינה מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו. נשתמש בשברים חלקים: קיימים A,B קבועים המקיימים

$$\frac{2y}{y^2-1}=\frac{2y}{(y-1)(y+1)}=\frac{A}{y-1}+\frac{B}{y+1}$$

נמצא אותם. נכפיל ב y^2-1 ונשווה: $2y=A(y+1)+B(y-1)$ הצבה של $y=1$ תתן $2=2A$ ולכן $A=1$. הצבה של $y=-1$ תתן $-2=-2B$ ולכן $B=1$. מכאן ש

$$\int\frac{2y}{y^2-1}\mathrm{dy}=\int\left(\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y+1}\right)\mathrm{dy}=\ln|y-1|+\ln|y+1|=\ln\left|y^2-1\right|$$

ונוכל להמשיך מהשיוויון $\frac{2y}{y^2-1}\mathrm{dy}=\frac{1}{x}\mathrm{dx}$ לקבל:

$$\ln\left|y^2-1\right|=\ln|x|+C$$

ולכן

$$\left|y^2-1\right|=|x|\,e^C$$

$$y^2-1=\pm xe^C$$

$$.y=\pm\sqrt{1\pm xe^C}$$

נציב תנאי התחלה $y(1)=2$

$$2=y(1)=\pm\sqrt{1\pm e^C}$$

לכן צריך לקחת את הפתרון עם הפלוס (שלפני השורש) ובנוסף

$$4=1\pm e^C$$

$$e^C=\pm 3$$

לכן צריך את הפלוס ולקבל ש $C=\ln(3)$. סה"כ הפתרון

$$.y=\sqrt{1+xe^{\ln(3)}}=\sqrt{1+3x}$$

3. מצאו פתרון כלשהו למד"ר $y''-3y'+2y=e^{3x}\sin(e^x)$.

פתרון: הפולינום האופייני של המד"ר ההומגנית

$$p(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

בעל שורשים $1,2$. לכן $y_1=e^x, y_2=e^{2x}$ בסיס למרחב הפתרונות למד"ר ההומגנית. נמצא פתרון פרטי למד"ר הלא הומגנית בעזרת

שיטת וריאצית מקדמים: נחפש פתרון פרטי מהצורה

$$y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$$

כאשר c_i ימצאו בעזרת מציאת c_i'. נגדיר

$$V = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{pmatrix}$$

ומתקיים כי $\begin{pmatrix} 0 \\ e^{3x}\sin(e^x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{pmatrix}$ ונמצא $\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix}$ בעזרת קרמר. מתקיים

$$c_1' = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & e^{2x} \\ e^{3x}\sin(e^x) & 2e^{2x} \end{pmatrix}}{\det V} = -\frac{e^{5x}\sin(e^x)}{e^{3x}} = -e^{2x}\sin(e^x)$$

$$c_2' = \frac{\det \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^{3x}\sin(e^x) \end{pmatrix}}{\det V} = \frac{e^{4x}\sin(e^x)}{e^{3x}} = e^x\sin(e^x)$$

וכעת נחשב את $\int c_i'$. נשתמש בהצבה:

$$c_1(x) = -\int e^{2x}\sin(e^x)\mathrm{dx} = \left\{ \begin{array}{c} t = e^x \\ \mathrm{dt} = e^x\mathrm{dx} \end{array} \right\} = -\int t\sin(t)\mathrm{dt}$$

ונמשיך באינטגרציה בחלקים

$$-\int t\sin(t)\mathrm{dt} = \left\{ \begin{array}{ccc} f = t & \Rightarrow & f' = 1 \\ g' = \sin(t) & & g = -\cos(t) \end{array} \right\} = t\cos(t) - \int \cos(t)\mathrm{dt} =$$

$$= t\cos(t) - \sin(t) = e^x\cos(e^x) - \sin(e^x)$$

כלומר $c_1(x) = e^x\cos(e^x) - \sin(e^x)$. נמשיך ל c_2:

$$c_2(x) = \int e^x\sin(e^x)\mathrm{dx} = \left\{ \begin{array}{c} t = e^x \\ \mathrm{dt} = e^x\mathrm{dx} \end{array} \right\} = \int \sin(t)\mathrm{dt} = -\cos(e^x)$$

ולכן פתרון פרטי למד"ר שלנו הוא

$$\begin{aligned} y_p &= c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 \\ &= e^x\left(e^x\cos(e^x) - \sin(e^x)\right) + e^{2x}\left(-\cos(e^x)\right) \\ &= -e^x\sin\left(e^x\right) \end{aligned}$$

4. מסה של $m = 2\text{kg}$ מחוברת לקפיץ בעל קבוע קפיץ k על משטח חסר חיכוך. כמו כן נתון כי ברגע $t = 0$ המסה הייתה ממוקמת כך שהקפיץ היה רפוי, אך מהירותה של המסה לא הייתה אפס. לבסוף, נתון כי הרגע הבא בו המסה חזרה למיקום בו הקפיץ רפוי הוא $t = \frac{\pi}{2}$.

(א) מצאו את קבוע הקפיץ k.

פתרון: נסמן מיקום המסה ביחס לנקודת הריפיון ב y. בפרט $y(0) = 0$. הכיוון החיובי לכיוון המהירות ההתחלתית v_0 (ששונה מאפס). הכח הפועל על המסה הוא ky בכיוון המנוגד למיקום ולכן הכח הוא $-ky$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל כל הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-ky = ma = 2a$$

או $-ky = 2y''$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). נעביר אגף ונחלק ב 2

$$y'' + \frac{k}{2}y = 0$$

ונקבל מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים. הפולינום האופייני שלה הוא

$$p(x) = x^2 + \frac{k}{2}$$

והשורשים של הפולינום הם $\pm\sqrt{-\frac{k}{2}} = \pm i\sqrt{\frac{k}{2}}$ ולכן

$$\cos\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right), \sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right)$$

בסיס למרחב הפתרונות. לכן

$$y(x) = c_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right)$$

ונשתמש בנתוני השאלה $y(0)=0, y(\frac{\pi}{2})=0$ למצוא את הקבועים c_i. מהנתון הראשון, נקבל

$$0=y(0)=c_1$$

ולכן $y(x)=c_2\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right)$ ונשתמש בנתון השני:

$$0=y(\frac{\pi}{2})=c_2\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

לכן $c_2=0$ או $\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=0$. לא ייתכן כי $c_2=0$ שהרי כי אז $y\equiv 0$ וגם הנגזרת $y'\equiv 0$ בפרט $y'(0)=0$ בניגוד לנתון שהמהירות ההתחלתית שונה מאפס. לכן $\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=0$ ולכן קיים N שלם כך ש $\sqrt{\frac{k}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}=N\pi$ לכן $k=8N^2$. כיוון ש $t=\frac{\pi}{2}$ הוא הזמן הראשון אחרי $t=0$ שבו $y(t)=0$ נסיק כי $N=1$ (ואז $y(\frac{\pi}{2})=c_2\sin(\pi)$, אם $N>1$ אזי היתה נקודה זמן לפני $\frac{\pi}{2}$ בה $y(t)=c_2\sin(\pi)$ בסתירה לנתון). לכן

$$k=8$$

ו

$$y(x)=c_2\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right)=c_2\sin\left(\sqrt{\frac{8}{2}}x\right)=c_2\sin(2x)$$

כעת נגזור

$$y'=2c_2\cos(2x)$$

ומתקיים כי

$$v_0=y'(0)=2c_2$$

ולכן $c_2=\frac{v_0}{2}$. מכאן ש

$$.y(x)=c_2\sin(2x)=\frac{v_0}{2}\sin(2x)$$

(ב) מצאו את גודל מהירות המסה ברגע $t=0$, אם ברגע $t=\frac{\pi}{4}$ המסה הייתה במרחק מטר אחד מנקודת הרפיון.

פתרון: בסעיף הקודם ראינו ש $y(x)=\frac{v_0}{2}\sin(2x)$ ונתון ש

$$1=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{v_0}{2}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\frac{v_0}{2}$$

ולכן

$$v_0=2$$

שזה המהירות ההתחלתית. הערה כיוון ש $\frac{\pi}{2}$ זה הזמן הראשון בו המסה חוזרת לנקודת הריפיון אז בזמן $\frac{\pi}{4}$ המסה נעה בכיוון המהירות ההתחלתית שהגדרנו אותה לכיוון החיובי ולכן $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ ולא $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

5. נסמן ב D את אופרטור הגזירה, וב I את אופרטור הזהות.

(א) עבור $S=xD+I$ מצאו פתרון למד"ר $Sy=e^x$.

פתרון: המד"ר המבוקשת היא

$$xy'+y=e^x$$

ובחילוק ב x נקבל

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{e^x}{x}$$

שהינה מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $y'+a(x)y=b(x)$ עבור $a(x)=\frac{1}{x}, b(x)=\frac{e^x}{x}$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. נבחר $A(x)=\ln|x|$ ונציב +

$$y(x)=e^{-\ln|x|}\left(C+\int\frac{e^x}{x}e^{\ln|x|}\mathrm{dx}\right)=|x|^{-1}C+|x|^{-1}\int\frac{e^x}{x}|x|\,\mathrm{dx}$$

נשים לב שעבור $x>0$ מתקיים

$$|x|^{-1}\int\frac{e^x}{x}|x|\,\mathrm{dx}=x^{-1}\int\frac{e^x}{x}x\mathrm{dx}$$

ועבור $x<0$ מתקיים

$$|x|^{-1}\int\left|\frac{e^x}{x}x\right|\mathrm{dx}=-x^{-1}\int\frac{e^x}{x}(-x)\,\mathrm{dx}=x^{-1}\int\frac{e^x}{x}x\mathrm{dx}$$

ולכן בכל מקרה:

$$y(x)=|x|^{-1}C+x^{-1}\int\frac{e^x}{x}x\mathrm{dx}=|x|^{-1}C+x^{-1}e^x$$

ואם נציב $C=0$ נקבל כי $y(x)=x^{-1}e^x$ הוא פתרון פרטי למד"ר.

(ב) עבור $T=(D-I)(xD+I)$ מצאו $y_1,y_2\in\ker T$ כך ש y_1,y_2 בת"ל עבור $x>0$.

פתרון: ראינו ש $y_1(x)=x^{-1}e^x$ מקיים כי $(xD+I)\,y_1=e^x$ ומכיוון ש $(D-I)\,e^x=e^x-e^x=0$ נקבל ש $y_1\in\ker T$. נמצא y_2 המקיים $(xD+I)\,y_2=0$: צריך למצוא פתרון למד"ר

$$xy'+y=0$$

שבסידור מחדש

$$xy'=-y$$

$$-\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}$$

$$-\frac{\mathrm{dy}}{y}=\frac{\mathrm{dx}}{x}$$

שהיא פרידה. נעשה אינטגל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו, לקבל

$$-\ln|y|=\ln|x|+C$$

ולכן

$$\ln|y|=-\ln|x|+C$$

$$|y|=\frac{1}{|x|}e^C$$

$$y = \pm \frac{1}{x} e^{C}$$

ואם נבחר את הפתרון עם הפלוס ו $C = 0$ נקבל ש $y_2(x) = \frac{1}{x}$ מקיים $(xD + I)\, y_2 = 0$ ולכן גם $Ty_2 = 0$ כלומר $y_2 \in \ker T$.

נוכיח ש y_1, y_2 בת"ל. נניח

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$$

ונראה כי $c_1 = c_2 = 0$. אכן, נפעיל את האופרטור $(xD + I)$ על המשוואה ונקבל

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 (xD + I)\, y_1 + c_2 (xD + I)\, y_2 \\ &= c_1 \cdot 0 + c_2 e^{x} \end{aligned}$$

ולכן $c_2 = 0$. נחזור למשוואה $c_1 y_1 = 0$ להסיק כי שגם $c_1 = 0$ כנדרש.

(ג) מצאו פתרון למד"ר $xy'' + (2 - x)\, y' - y = 0$ המקיים $y(1) = 0, y'(1) = e$.

פתרון: נשים לב שעבור y מתקיים:

$$Ty = (D - I)(xD + I)\, y = (D - I)(xy' + y) =$$

$$= D(xy' + y) - (xy' + y) = y' + xy'' + y' - (xy' + y) =$$

$$= xy'' + (2 - x)\, y' - y$$

ולכן הגרעין של T הוא אוסף הפתרונות למד"ר שלנו $xy'' + (2 - x)\, y' - y = 0$.

מצאנו בסעיף קודם כי $y_1(x) = x^{-1} e^{x}, y_2(x) = \frac{1}{x}$ ולכן הפתרון הכללי למד"ר הוא

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \cdot x^{-1} e^{x} + c_2 \cdot \frac{1}{x}$$

והנגזרת

$$y' = c_1 \left(\left(x^{-1} - x^{-2} \right) e^{x} \right) - c_2 \frac{1}{x^2} = c_1 \left(\left(1 - \frac{1}{x} \right) \frac{e^{x}}{x} \right) - c_2 \frac{1}{x^2}$$

וכעת נוכל להציב תנאי התחלה.

$$0 = y(1) = c_1 \cdot \left(1^{-1} \cdot e^{1} \right) + c_2 \cdot \frac{1}{1} = ec_1 + c_2$$

$$e = y'(1) = -c_2$$

לכן $c_2 = -e$ מהמשוואה השניה. נציב בראשונה

$$c_1 = -\frac{c_2}{e} = 1$$

לכן סה"כ קיבלנו את הפתרון:

$$y(x) = c_1 \cdot x^{-1}e^x + c_2 \cdot \frac{1}{x} = x^{-1}e^x - \frac{e}{x}.$$