קבוצה - Ensemble

תזכורת

הקבוצות המדידות לבג מהוות σ־אלגברה הנקראת (σ־)אלגברת לבג.

$$\mathscr{L}(\mathbb{R}) := \left\{ E \subseteq \mathbb{R} \mid \forall_{A \subseteq \mathbb{R}} m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*\left(A \cap E^{\complement}\right) \right\}$$

כσ־אלגברה היא סגורה ביחס למשלים ולאיחודים בני מנייה.
מידת לבג היא הצמצום של מידת לבג החיצונית אל σ־אלגברת לבג:

$$m = m^*|_{\mathscr{L}(\mathbb{R})}$$

תרגיל

תהיינה $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}$ קבוצות מדידות לבג. הוכיחו:

$$m^*(E_1 \cup E_2) + m^*(E_1 \cap E_2) = m^*(E_1) + m^* E_2$$

פתרון

בגלל המדידות של $E_{1,2}$ נקבל שגם

$$E_2 \backslash E_1 \qquad E_1 \backslash E_2 = E_1 \cap E_2^{\complement} \qquad E_1 \cap E_2 \qquad E_1 \cup E_2$$

כולת מדידות. ע"פ המדידות של קבוצות נקבל:

$$+\begin{cases} m^*(E_1) = m^*(E_1 \backslash E_2) + m^*(E_1 \cap E_2) \\ m^*(E_2) = m^*(E_2 \backslash E_1) + m^*(E_1 \cap E_2) \end{cases}$$

$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*((E_1 \cup E_2) \cap E_1) + m^*((E_1 \cup E_2) \backslash E_1) =$$

$$= m^*(E_1) + m^*(E_1 \backslash E_2) = m^*(E_1 \cap E_2) + m^*(E_1 \backslash E_2) + m^*(E_2 \backslash E_1)$$

נשחק קצת:

$$m^*(E_1) + m^*(E_2) = m^*(E_1 \backslash E_2) + m^*(E_2 \backslash E_1) + m^*(E_1 \cap E_2) + m^*(E_1 \cap E_2) =$$

$$= m^*(E_1 \cup E_2) + m^*(E_1 \cap E_2)$$

$\blacksquare$

הערה

בגלל שעבדנו רק עם קבוצות מדידות, היינו יכולים לרשום m במקום m^*.

תרגיל

תהי $E \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ קבוצה מדידה, $a, b \in \mathbb{R}$ קבועים. הוכיחו כי הקבוצה $aE + b$ מדידה גם היא.

פתרון

ראינו בהרצאה שהזזה שומרת על מדידות, ולכן נניח בה"כ $b = 0$. נחלק לשני מקרים:

$a = 0$ במקרה זה הקבוצה $aE = \{0\}$ היא נקודות ובוודאי מדידה.

$a \neq 0$ נוכיח שתי טענות עזר, לכל $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ולכל $a \in \mathbb{R}$.

א. $(aA)^{\complement} = aA^{\complement}$

ב. $a(A \cap B) = (aA) \cap (aB)$

הוכחה: א.

$$x \in (aA)^{\complement} \iff x \notin aA \iff \frac{x}{a} \notin A \iff \frac{x}{a} \in A^{\complement} \iff x \in aA^{\complement}$$

ב.

$$x \in a(A \cap B) \iff \frac{x}{a} \in A \cap B \iff \frac{x}{a} \in A \wedge \frac{x}{a} \in B \iff x \in aA \wedge x \in aB \iff x \in (aA) \cap (aB)$$

חזרה לתרגיל: המדידות של E נותנת:

$$\forall_{A \subseteq \mathbb{R}} m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*\left(A \cap E^{\complement}\right)$$

$$|a| \cdot m^*(A) = |a| \cdot m^*(A \cap E) + |a| m^*\left(A \cap E^{\complement}\right)$$

$$m^*(aA) = m^*(a(A \cap E)) + m^*\left(a\left(A \cap E^{\complement}\right)\right)$$

$$m^*(aA) = m^*((aA) \cap (aE)) + m^*\left((aA) \cap (aE)^{\complement}\right)$$

$B = aA$ היא גם תת קבוצה שרירותית ב$\mathbb{R}$ $\Longleftarrow$

$$\Longrightarrow \forall_{B \subseteq \mathbb{R}} m^*(B) = m^*(B \cap (aE)) + m^*\left(B \cap (aE)^{\complement}\right) \Longrightarrow aE \in \mathscr{L}$$

■

קבוצת קנטור

נביא כעת דוגמה חשובה שתשמש אותנו במשך הקורס.

הגדרה

נסמן $C_0 = [0,1]$, ולכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר את C_{n+1} להיות C_n לאחר שמורידים מכל קטע בו את השליש האמצעי(הפתוח) ע"י הנוסחה

$$C_{n+1} = \frac{C_n}{3} \cup \left(\frac{C_n}{3} + \frac{2}{3}\right)$$

(כל C_n הוא איחוד של 2^n קטעים סגורים שאורכם $\frac{1}{3^n}$)

קבוצת קנטור מוגדרת כחיתוך כל הC_nים: $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$

תכונות

א. C קומפקטית.

ב. יהי $x \in [0,1]$. אם נציג את x בבסיס טרנארי(3) $x = 0.x_1x_2x_3\dots$ ($x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$)
נקבל כי $x \in C \iff$ קיים ייצוג טרנארי של x שבו לכל $n \in \mathbb{N}$ הספרה הnית של x לאחר הנקודה הטרנארית היא 0 או 2.

ג. C אינה בת מנייה.

ד. $m(C) = 0$.

ה. C אינה מכילה שום קטע(בעל מידה חיובית).

ו. C אינה איחוד בן מנייה של קטעים סגורים.

הוכחה

א. בתרגיל.

ב. נוכיח ש
$$\begin{gathered} x = 0.x_1x_2\dots \in C_n \\ \Updownarrow \\ x_1, x_2, \dots x_n \in \{0,2\} \end{gathered}$$
באינדוקציה.

בסיס $n = 1$ יש להוכיח $x_1 \in \{0,2\} \iff x \in C_1$.
$x_1 = 0$ או $x_1 = 2 \iff x \in C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$

צעד $(\Downarrow)$ נניח את נכונות הטענה עבור $n \in \mathbb{N}$ כלשהו, ונוכיח את נכונות הטענה עבור $n+1$:

$$x \in C_{n+1} = \frac{C_n}{3} \cup \left(\frac{C_n}{3} + \frac{2}{3}\right) \implies x \in \frac{C_n}{3} \vee x \in \frac{C_n}{3} + \frac{2}{3} \implies 3x \in C_n \vee 3x - 2 \in C_n$$

ע"פ ההנחה, $d_n(3x) \in \{0,2\} \vee d_n(3x-2) \in \{0,2\}$ ולכן $d_{n+1}(x) \in \{0,2\}$ ולכן $x_{n+1} \in \{0,2\}$.

(⇑) ידוע כי $x_1, x_2, \dots x_n, x_{n+1}$ ולכן ע"פ הנחת האינדוציה $x \in C_n$. יש להוכיח $x \in C_{n+1} = \frac{C_n}{3} \cup \left(\frac{C_n}{3} + \frac{2}{3}\right)$, כלומר $3x \in C_n$ או $3x - 2 \in C_n$. נחלק למקרים:

$x_1 = 0$ ואז $x = 0.0x_2x_3\dots x_nx_{n+1}\dots \Longleftarrow 3x = 0.x_2x_3\dots x_nx_{n+1}\dots \Longleftarrow 3x \in C_n$.

$x_1 = 0$ ואז:

$$x = 0.2x_2x_3\dots x_nx_{n+1}\dots$$

$$3x = 2.x_2x_3\dots x_nx_{n+1}\dots$$

$$3x - 2 = 0.x_2x_3\dots x_nx_{n+1}\dots$$

$$\Longleftarrow 3x - 2 \in C_n$$

מש"ל אינדוקציה בסיכום:

$$x \in C \iff x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \iff \forall_{n\in\mathbb{N}} x \in C_n \iff \forall_{n\in\mathbb{N}} d_n(x) = x_n \in [0,2]$$

ג. נניח בשלילה שC בת מנייה. אזי נוכל לרשום $C = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. נניח שלכל x_n יש פיתוח טרינארי כנ"ל:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.x_1^{(1)}x_2^{(1)}x_3^{(1)}\dots \\ x_2 &= 0.x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(2)}\dots \\ &\vdots \\ x_i &= 0.x_1^{(i)}x_2^{(i)}x_3^{(i)}\dots \end{aligned}$$

$$\forall_{i,j\in\mathbb{N}} x_j^{(i)} \in \{0,2\}$$

נגדיר מספר חדש $y \in C$ ע"י $y = 0.y_1y_2\dots y_n\dots$ עבור

$$y_i = \begin{cases} 2 & x_i^{(i)} = 0 \\ 0 & x_i^{(i)} = 2 \end{cases} = 2 - x_i^{(i)}$$

y שונה מכל ה$\{x_i\}$ - סתירה לכך שמנינו את C.

ד. לכל $N \in C$, $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \subseteq C_N$. ע"פ מונוטוניות

$$0 \le m(C) \le m(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^N \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

ה. נניח בשלילה שקיים קטע $I \subseteq C$ עם מידה(אורך) $m(I) = l \geq 0$. ניקח N כל גדול עד ש $l < \frac{1}{3^N}$. $I \subseteq C \subseteq C_N$ הוא קשיר, ולכן מוכל באחד ממרכיבי הקשירות של C_N - אבל אין מקום!

הוכחה חלופית: $I \subseteq C \Longleftarrow 0 = m(C) \leq m(I) < 0$ - סתירה!

ו. בתרגיל.

תזכורת

1. מרחב מדיד(מ"מ) הוא זוג סדור (X, Σ) כאשר X היא קבוצה כלשהי וΣ היא <u>σ-אלגברה מעל X</u>, כלומר Σ מקיימת:

   א. $\emptyset, X \in \Sigma$

   ב. $E \in \Sigma \implies E^{\complement} \in \Sigma$

   ג. אם $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ כולן בΣ אזי גם $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$.

2. מרחב מידה חיובית(ממ"ח) הוא שלשה סדורה (X, Σ, μ) כאשר (X, Σ) הוא מ"מ ו$\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ הוא <u>מידה</u>, כלומר μ מקיימת:

   א. $\mu(\emptyset) = 0$.

   ב. אם $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ כולן בΣ וזרות בזוגות אזי $\mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

תרגיל

יהי (X, Σ, μ) ממ"ח ותהיינה $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות "עולה"(כלומר $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \cdots$). הוכיחו כי $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

הוכחה

בהרצאה ראינו איך לבנות סדרה חדשה של קבוצות מדידות $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ עם התכונות:

א. זרות בזוגות.

ב. $\bigcup_{n=1}^{N} E_n = \biguplus_{n=1}^{N} F_n$ לכל $N \in \mathbb{N}$.

ג. $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \biguplus_{n=1}^{\infty} F_n$.

אם כך:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(F_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\biguplus_{n=1}^{N} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mu\left(E_N\right)$$