מקליד: עידן אריה
מתרגל: ד"ר אורן קאפח
תאריך: 2019-06-19

גרפיקה ממוחשבת
89-663-02

חזרה למבחן

שאלה

נתונות 3 נקודות בתלת מימד A, B, C. תן את מטריצת הטרנספורמציה שמבצעת הגדלה פי 2 בציר מסויים כך ששלושת הנקודות הנ"ל מהוות נקודות שבת תחת הטרנספורמציה ולאחר מכן סיבוב של $40°$ סביב אותו ציר.

פתרון

3 נקודות מהוות מישור - אם נעשה scale על הנורמל של אותו מישור הנקודות לא יזוזו.
נגדיר ווקטורי עזר:

$$AB = B - A \qquad AC = C - A$$

נעביר מערכת צירים. ציר הZ החדש הוא:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$w' = AB \times AC \qquad w = \frac{w'}{|w|}$$

מי הX ומי הY לא משנה - כל עוד הם מאונכים לw. ניקח לשם הפשטות את AB בתור ציר הX החדש:

$$u = \frac{AB}{|AB|}$$

ובתור ציר הY:

$$v = w \times u$$

נשים לב שלא צריך לנרמל כי u, w כבר אור

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תונורמליים.
A הוא ראשית הצירים שלנו, לכן כדי להעביר לראשית הצירים:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -A_x \\ 0 & 1 & 0 & -A_y \\ 0 & 0 & 1 & -A_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וכדי לסובב:

$$M = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ w_x & w_y & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

בשביל לעשות scale במערכת הצירים החדשה:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

והסיבוב:

$$R = \begin{pmatrix} \cos 40^\circ & -\sin 40^\circ & 0 & 0 \\ \sin 40^\circ & \cos 40^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וכדי להחזיר:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A_x \\ 0 & 1 & 0 & A_y \\ 0 & 0 & 1 & A_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולבסוף נבנה את המטריצה שלנו:

$$\mathrm{Tr} = T^{-1} \cdot M^{-1} \cdot R \cdot S \cdot M \cdot T$$

נשים ♡: לא צריך לחשב את המטריצה עצמה, רק להראות איך בונים אותה.

שאלה

תאר את אלגוריתם הRay Tracing בעזרת פסואודו קוד. כיצד מטפל אלגוריתם זה בעצמים כגון מראות או כלים מזכוכית?

פתרון

חשוב מאוד - תחילת האלגוריתם הוא לא פונקציית הtrace ray, אלא חלוקת החלון לפיקסלים והצבתם בעולם. כלומר לכל פיקסל יש מיקום תלת מימדי. יש גם מיקום של המצלמה, ואז לכל פיקסל מייצרים קרן ועליו קוראים לtrace ray:

```
for each pixel (x,y) create a ray:
```

```
P = location of the pixel in the 3D space
Ray.O = O
Ray.direction = P − O
Image(x, y) = TraceRay(Ray)
```

ורק אז מראים איך עושים את TraceRay

שאלה

1. תאר את האלגוריתם למציאת התנגשות בין נקודה לפוליגון גדול.
2. מהו BSP וכיצד הוא עוזר לייעול מציאת התנגשויות בין גופים.
3. כיצד תמצא התנגשות בין Bounding Sphere למישור?

פתרון

1. מייצרים קרן מהנקודה לכל אחת מהקודקודים, וסוכמים את הזוויות. אם זה קרוב ל$360°$ מתנגשים - אחרת אין התנגשות.
2. הוא מחלק את העולם ומקטין את האובייקטים שצריך לבדוק מול כל אובייקט.
3. מרכז הBounding Sphere הוא C ורדיוסו r. לוקחים נקודה כלשהי על המישור P, ואת נורמל המישור N. רוצים לבדוק את ההטלה של PC על R:

$$v = C - P$$

$$d = |v| \cos\theta = v \cdot N > r$$

שאלה

ענה על השאלות הבאות עבור אינטרפולציה מסוג Hermite Spline

1. כמה אילוצים נדרשים עבור האינטרפלוציה?
2. מהם האילוצים הנדרשים?
3. מהי הרציפות של האינטרפולציה?
4. בהנחה ש$V^T(u) = U^T(u)\,Q$ מצא את המטריצה Q על סמך האילוצים הנתונים (כד כדי ביטוי - אין צורך להכפיל או להפוך מטריצות)

פתרון

1. למדנו על שני סוגים של spline - לינארי וcubic. עבור cubic צריך 4 אילוצים, וhermite spline הוא cubic ולכן צריך 4 אילוצים.
2. שתי נקודות קצה P_k, P_{k+1} ושני טנגנטים T_k, T_{k+1}.
3. במעבר בין נקודות נרצה אותה נקודה ואותו טנגנט - כלומר יש רציפות של הערך ושל הנגזרת, אבל לא של הנגזרת השנייה. לכן הרציפות היא C_1.
4. $V^T(u) = U^T(u)\,Q$. מה זה Q? Q אמורה לייצג את האילוצים. האילוצים הם:

$$V^T(0) = P_k \qquad V^T(1) = P_{k+1} \qquad V'^T(0) = T_{k+1} \qquad V'^T(1) = T_{k+1}$$

ניזכר ש$U^T(u) = \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u^1 & 1 \end{pmatrix}$, ולכן $U'^T(u) = \begin{pmatrix} 3u^2 & 2u & 1 & 0 \end{pmatrix}$. לכן אם נכתוב את האילוצים בתור מטריצה:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ T_k \\ T_{k+1} \end{pmatrix}}_{G} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M} Q$$

כאשר G היא מטריצת האילוצים הגיאומטרית וM היא קבועה לפי סוג הspline, ואז $G = M \cdot Q$. ולכן $M^{-1} \cdot G = Q$ ונקבל

$$V^T(u) = U^T(u) \cdot M^{-1} \cdot G$$