הערה: הפתרונות בקובץ זה הם לרוב **ארוכים** וזאת **בכוונה.** מי שרוצה פתרון רק מהצורה "נבחר .." יכול להסתכל בפתרונות המבחנים שבאתר של המרצה. הרעיון בקובץ הזה הוא לספק את **המחשבה איך להגיע** לתשובה (באיזה חבורות לחפש). הרעיון שניסיתי להעביר הוא שמרגע שמבינים איפה צריך לחפש, בדרך כלל הדוגמא הפשוטה/קטנה ביותר שחושבים עליה תעבוד. במבחן כמובן **שאין צורך** לרשום למה בחרתם את מה שבחרתם; מה **שכן צריך** הוא להראות שהחבורות / תת-חבורות / איברים וכו' שבחרתם מקיימים את כל התנאים כדרוש.

15) ראינו כמה דוגמאות בתרגולים האחרונים. למשל $(x^2+1)^2$ מעל השדה $\mathbb{R}$. (שימו לב: צריך לציין גם מה הפולינום שבחרתם, וגם מה השדה שבחרתם שמעליו אין לו שורשים! למשל לפולינום הזה כן יש שורשים מעל $\mathbb{Z}_2$. כשאתם בוחרים דוגמאות במבחן ציינו את **כל** הפרטים.)

14) מחפשים חבורה לא אבלית שהיא מכפלה של חבורות אבליות. נבחר את החבורה הלא אבלית הפשוטה ביותר שיש: $G=S_3$. קל לפרק את G למכפלה של שתי ת"ח: $S_3=<(12)><(123)>$ לכן נבחר $A=<(12)>, B=(<123>)$. A,B אבליות כי $A\cong\mathbb{Z}_2, B\cong\mathbb{Z}_3$.

13) דיברנו ארוכות על הנושא של צמידות של איברים בחבורת התמורות ושל סדרים של איברים בחבורת התמורות. נבחר $a=(1234), b=(1234)(56)$, שתיהן מסדר 4 , והן אינן צמודות כי אין להן אותו מבנה מחזורים.

12) הגיוני לבחור חבורה אבלית כי אז יהיה הכי קל למצוא דוגמאות: כי אז כל שני איברים מתחלפים. נבחר $G=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ ו- $a=(1,0), b=(0,1)$, ברור שאי אפשר להגיע מ- a ל- b או להיפך(כל אחד מהם "חי" ברכיב משלו.. $a+a=b+b=(0,0)$). (פתרון "אחר" שהציעו לי בתרגול חזרה: $U_8=\{1,3,5,7\}$ ונבחר את האיברים $a=3, b=5$. זה למעשה אותו פתרון: ראינו כי $U_8\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$).

11) ראשית, מדובר פה על חבורות אבליות אז נעבור לכתיב חיבורי במקום כתיב כפלי. כלומר חזקה הופכת לכפל. כלומר "H^4" $=4H$. נשים לב שלמשל $4\mathbb{Z}_4=\{e\}$ (כי $4\mathbb{Z}_4=\{4\cdot 0,4\cdot 1,4\cdot 2,4\cdot 3\}=\{0,0,0,0\}=\{0\}$). באותו האופן $4\mathbb{Z}_2=\{e\}$. לכן אם החבורה מורכבת רק מרכיבים של $\mathbb{Z}_4$ ו- $\mathbb{Z}_2$, כאשר "נעלה ברביעית" נקבל את החבורה הטריוואלית. אז רק נשאר למצוא שתי חבורות מסדר 32 כאלה: למשל $A=\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$, $B=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. (דרך מעט אחרת לפתור את השאלה: אתם יודעים למצוא את כל החבורות האבליות מסדר 32: רשמו אותן.)

10) ראה 13.

9) אנחנו רוצים להגיע למסקנה שת"ח כלשהי היא **לא** נורמלית, לכן צריך לבחור G לא-אבלית, ושוב, נבחר בפשוטה ביותר: $G=S_3$. נקח $H=<(12)>=\{id,(12)>\cong\mathbb{Z}_2$ לכן אבלית. מצד שני H לא נורמלית ב- G.

8) ראינו במהלך התרגולים מספר דוגמאות כאלה. נזכר באחת מהן: למשל כאשר מיינו את כל החבורות האבליות מסדר 81 ראינו שהן:

$$\mathbb{Z}_{81}$$
$$\mathbb{Z}_{27}\times\mathbb{Z}_3$$
$$\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_9$$
$$\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$$
$$\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$$

וראינו שלכולן אקספוננט שונה מלבד $A=\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_9$ ו- $B=\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$ שלשתיהן אקספוננט 9. אך גם הראנו שהן לא איזומורפיות (ע"י בחינת כמה איברים יש מסדר 9 בכל חבורה, אפשר לחלופין להראות ש- A^3 לא איזו' ל- B^3).

7) הגיוני לבחור חבורה G אבלית (כי אז כל ת"ח שלה היא נורמלית). החבורה האבלית הכי פשוטה שאנחנו מכירים היא $\mathbb{Z}_2$. אם כך נבחר $G=N=\mathbb{Z}_2$. את H כמובן נבחר להיות לא אבלית (כדי שיהיו בה ת"ח לא נורמליות), החבורה הלא אבלית הכי פשוטה היא $H=S_3$. נשאר להגדיר את ההומומורפיזם: מוגדר לפי $(12)\to 1$.
$\phi(\mathbb{Z}_2)=<12>=\{id,(12)\}$ והיא אינה נורמלית ב- S_3 (למשל כי לא מכילה את כל המחזורים מאורך 2).

6) ניסוח אחר של הטענה "לכל חבורה יש מרכז לא טריוואלי" ואנחנו יודעים שזה לא נכון. למשל עבור כל $n\geq 3$ ל- S_n יש מרכז טריוואלי. נבחר למשל $G=S_3$.

5) ראה 13.

4) ב- S_n אין מספיק תת-חבורות נורמליות (ואנחנו צריכים לפחות שתי תח"נ נורמליות שונות). לכן נלך לאוסף הבא של חבורות לא-אבליות שאנחנו מכירים: D_n. D_3 לא טובה כי יש בה רק תח"נ אחת (למשל כי $D_3\cong S_3$...) לכן נבחר ב- D_4. לפי האפיון שלנו של תח"נ של D_4 נבחר בת"ח $A=<\sigma>, B=<\sigma_2>$ שכידוע לנו הן נורמליות (ואם לא היה לנו את האפיון של ת"ח הנורמליות של D_n באופן כללי, עדיין היינו מסיקים בקלות שהן נורמליות: A היא מאינדקס 2 ב- D_4, ו- B היא המרכז של D_4). נרשום אותן מפורשות: $A=\{id,\sigma,\sigma^2,\sigma^3\}\cong\mathbb{Z}_4$, $B=\{id,\sigma^2\}\cong\mathbb{Z}_2$. נבדוק שהתנאים מתקיימים: $|D_4/A|=2$ לכן $D_4/A\cong\mathbb{Z}_2\cong B$. כמו כן $|D_4/B|=4$ לכן D_4/B איזו' ל- $\mathbb{Z}_4$ או ל- $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. לא קשה לראות במקרה זה שהיא אכן איזומורפית ל- $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, לכן לא איזומורפית ל- A. (נימוק פשוט למה היא לא איזו' ל- $\mathbb{Z}_4$: כי $B=Z(D_4)$ וראינו כי $G/Z(G)$ לא ציקלית כאשר G לא אבלית. מי שלא הבחין ש- $B=Z(D_4)$ יכול להוכיח זאת ישירות).

3) החבורות הכי פשוטות ושאנחנו מכירים הכי טוב הן $\mathbb{Z}_n$. מה זה "x^3" ב- $\mathbb{Z}_n$? זה כפל ב-3. $\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_4$ קטנות מדי, נלך ל- $\mathbb{Z}_6$: נבחר $x=2,\ y=4$. ואז $3x=0, 3y=0$ כדרוש.

2) ברור שצריך לבחור חבורה G שאיננה אבלית כדי שיהיה סיכוי שיהיו ת"ח שאינן נורמליות (הרי רוצים $H\cap N$ לא נורמלית ב- N). כמו כן הגיוני לבחור חבורה שיש לה מעט מאוד ת"ח נורמליות כדי שיהיה קל להגיע למסקנה. אנחנו מכירים חבורות כאלה: ל- S_n עבור $n\geq 5$ יש רק תח"נ (לא טריוואלית) יחידה והיא A_n. לכן נבחר $G=S_5, N=A_5$, ונשאר לבחור ת"ח H של S_5 כך ש- $H\cap A_5$ לא תהיה נורמלית. אנחנו יודעים ש- A_5 פשוטה לכן כל H (לא טריוואלית) המוכלת ממש ב- A_5 תהיה טובה. למשל $H=<(123)>$.

1) נבחר $G=S_3$, $x=(12), y=(13)$. ברור כי $\{id,(12)\}=<x>\neq<y>=\{id,(13)\}$. מתקיים $o(x)=2, o(y)=2$. מצד שני $xy=(132)$ לכן $o(xy)=3\neq 4=o(x)o(y)$.