תרגיל 1. חשבו את האינטגרלים הבאים:

1. $\int\limits_{\gamma} (2x+y+z)\mathrm{d}l$ כאשר $\gamma(t) = (t+1, t+2, 3)$ עבור $0 \le t \le 2$

פתרון. נשים לב ש
$$\gamma'(t) = (1,1,0)$$
ולכן
$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{2}$$
המסילה שלנו היא כמובן חלקה, הפונקציה שלנו רציפה, אז אין שום בעיה להציב בנוסחא ולקבל

$$\int\limits_{\gamma} 2x+y+z\mathrm{d}l = \int\limits_0^2 (2(t+1)+(t+2)+3)\sqrt{2}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int\limits_0^2 (3t+6)\mathrm{d}t$$
$$= \sqrt{2} \quad \frac{3}{2}t^2 + 6t\Big|_0^2 = \sqrt{2}(6+12) = \sqrt{2}\cdot 18$$

2. $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}l$ כאשר $\Gamma = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 4x\}$

פתרון. פתרון: כאן צריך להבין מה העקומה שלנו. היות ש
$$x^2+y^2-4x = 0$$
נקבל
$$(x-2)^2+y^2 = 2$$
כלומר יש לנו מעגל שמרכזו ב $(2,0)$ ורדיוסו 2. יהיה נוח להשתמש בקוארדינטות פולריות
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
אז ממשוואת המסילה נקבל ש
$$r^2 = 4r\cos\theta$$
ולכן אם $r \neq 0$ נקבל ש
$$r = 4\cos\theta$$
אז קיבלנו פרמטרזיציה של העקום
$$\gamma(t) = (4\cos^2 t, 4\cos t\sin t)$$

כאשר $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (כי כמו שראינו הערכים היחידים של העקום הם בחצי המישור הימני אז מספיק להסתכל על הזויות האלה)

$$\gamma'(t) = (-8\cos\theta\sin\theta, 4\cos 2t) = (-4\sin 2\theta, 4\cos 2t)$$

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{16\sin^2 2\theta + 16\cos^2 2\theta} = \sqrt{16} = 4$$

ואם נציב במשוואה לחישוב האינטגרל נקבל

$$\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}l = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos\theta \cdot 4\mathrm{d}t = 16\,\sin\theta|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 32$$

3. $\int\limits_{\Gamma} xyz\mathrm{d}l$ **כאשר** $\Gamma = \{(x,y,z) \mid x = t, \quad y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3} \quad z = \frac{1}{2}t^2, 0 \leq t \leq 1\}$

פתרון. הפרמטריזציה כאן כבר נתונה

$$\gamma(t) = (t, \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}, \frac{1}{2}t^2)$$

$$\gamma'(t) = (1, \sqrt{2t}, t)$$

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{1+2t+t^2} = \sqrt{(t+1)^2} = |t+1|$$

אבל לפי הנתון t חיובי ולכן בוודאי שזה שווה ל $t+1$.

עכשיו רק נציב בנוסחא

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Gamma} xyz\mathrm{d}l &= \frac{\sqrt{2}}{3}\int\limits_0^1 t^{\frac{9}{2}}(t+1)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{3}\int\limits_0^1 (t^{\frac{11}{2}} + t^{\frac{9}{2}})\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2}{13}t^{\frac{13}{2}} + \frac{2}{11}t^{\frac{11}{2}})\right|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{3}(\frac{2}{13} + \frac{2}{11}) \end{aligned}$$

תרגיל 2. נתון קפיץ על ידי $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 3t)$ כך שצפיפות המסה בנקודה (x,y,z) **היא** $x^2+y^2+z^2$. חשבו את מסת הקפיץ אם נתון שקצה אחד שלו נמצא ב $(1,0,0)$ ואורכו $\sqrt{360}\pi$.

פתרון. נתחיל בלחשב את אורך הקפיץ לפי הנוסחא

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 3)$$

ולכן

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 9} = \sqrt{10}$$

ולכן אם הקפיץ מתחיל בנקודה $(1,0,0)$ כלומר - $t=0$ ומסתיים בנקודה $t=a>0$ אז האורך הוא

$$\int_0^a \sqrt{10}\mathrm{d}t = \sqrt{10}a$$

היות שהאורך נתון והוא $\sqrt{360}\pi$ אז נקבל ש $a=6\pi$.

נשים לב שיש עוד אפשרות: והיא שהקפיץ מתחיל ב $t=a<0$ ומסתיים ב $t=0$ במקרה זה נקבל ש $a=-6\pi$.

בכל אופן נחשב מסה על ידי אינטגרל קווי מסוג ראשון. קודם כל המקרה ש $a=6\pi$

$$\begin{aligned}\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}l &= \int_0^{6\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t+9t^2)\sqrt{10}\mathrm{d}t = \sqrt{10}\int_0^{6\pi}(1+9t^2)\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{10}t+3t^3\Big|_0^{6\pi} = \sqrt{360}\pi+3(6\pi)^3\end{aligned}$$

עבור המקרה $a=-6\pi$ קל לראות שמתקבלת אותה תוצאה בדיוק.

תרגיל 3. תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה בעלת אורך עם תמונה Γ. תהי f פונקציה המוגדרת על Γ עבורה האינטגרל $\int_\gamma f\mathbf{d}l$ קיים.

1. הוכיחו כי f חסומה.
2. יהי M חסם של $|f|$. הוכיחו שמתקיים $\left|\int_\gamma f\mathbf{d}l\right| \le ML(\gamma)$.

הדרכה (לשני הסעיפים): עבדו עם ההגדרה של $\int_\gamma f\mathbf{d}l$ כגבול של סכומי רימן.

פתרון. נניח בשלילה ש f אינה חסומה. אזי לכל חלוקה $P: a=p_0<p_1\cdots<p_n=b$ של הקטע $[a,b]$ ולכל מספר M ניתן לבנות סכום רימן

$$\sum_{k=1}^n \|\gamma(p_i)-\gamma(p_{i-1})\| f(\gamma(t_i)) > M$$

כך ש $t_i\in[p_{i-1},p_i]$ ולכן אין גבול. באופן דומה, אם $|f(t)|<M$ לכל $t\in[a,b]$, אזי לכל סכום רימן מתקיים

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^n \|\gamma(p_i)-\gamma(p_{i-1})\| f(\gamma(t_i))\right| &\le \sum_{k=1}^n \left|\|\gamma(p_i)-\gamma(p_{i-1})\| f(\gamma(t_i))\right| \\ &\le \sum_{k=1}^n \|\gamma(p_i)-\gamma(p_{i-1})\| \left|f(\gamma(t_i))\right| \\ &\le \sum_{k=1}^n \|\gamma(p_i)-\gamma(p_{i-1})\| M \\ &\le ML(\gamma)\end{aligned}$$

מכיוון ש $\int_\gamma f\mathbf{d}l$ הוא גגול סכומים מהצורה $\sum_{k=1}^{n}\|\gamma(p_i)-\gamma(p_{i-1})\| f(\gamma(t_i))$ נקבל

$$\left|\int_\gamma f\mathbf{d}l\right| \le ML(\gamma).$$

תרגיל 4. תהיינה $\beta:[c,d]\to\mathbb{R}^n, \alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ שתי עקומות. נתון כי קיימת $\phi:[a,b]\to[c,d]$ כך ש $\beta\phi=\alpha$ ונתון כי ϕ היא חח"ע ועל, מונוטונית עולה, רציפה וההופכית ϕ גם רציפה (אבל לא נתון כי ϕ גזירה! ולכן לא ברור אם α ו β שקולות). הוכיחו כי לכל f המוגדרת על תמונת α,β מתקיים כי האינטגרל $\int_\alpha f\mathbf{d}l$ קיים אם ורק אם האינטגרל $\int_\beta f\mathbf{d}l$ קיים ובמקרה זה

$$\int_\alpha f\mathbf{d}l=\int_\beta f\mathbf{d}l$$

הדרכה: הראו כי לכל חלוקה $P: a=p_0<p_1<\cdots<p_n=b$ של קטע $[a,b]$ וסדרה של נקודות $\{t_i\}_{i=1}^n$ שמקיימות $t_i\in[p_{i-1},p_i]$ קיימת חלוקה $P': c=p'_0<p'_1<\cdots<p'_n=d$ וסדרה של נקודות $t'_i\in\left[p'_{i-1},p'_i\right]$

$$\|\alpha(p_i)-\alpha(p_{i-1})\|=\left\|\beta(p'_i)-\beta\left(p'_{i-1}\right)\right\|$$

ו

$$\alpha(t_i)=\beta(t'_i)$$

לכל $1\le i\le n$.

פתרון. תהי $P: a=p_0<p_1<\cdots<p_n=b$ חלוקה של הקטע $[,a,b]$ ו $t_i\in[p_{i-1},p_i]$. אזי מכיוון ש ϕ חח"ע ועל ומונוטונית עולה, הסדרה $\phi(p_i)=p'_i$ מהווה חלקוה של הקטע $[c,d]$, $t'_i=\phi(t_i)\in[p_{i-1},p_i]$ וכן מתקיים

$$\alpha(p_i)=\beta(\phi(p_i))=\beta(p'_i)$$
$$\alpha(t_i)=\beta(\phi(t_i))=\beta(t'_i)$$

לכן לכל סכום מהצורה

$$\sum_{i=1}^{n}\|\alpha(p_i)-\alpha(p_{i-1})\| f(\alpha(t_i))$$

מתאים סכום מהצורה

$$.\sum_{i=1}^{n}\left|\beta\left(p'_{i-1}\right)-\beta(p'_i)\right| f(\beta(t'_i))$$

ששווה לו. ההתאמה נכונה גם בכיוון השני מכיוון ש ϕ^{-1} גם מונוטונית חח"ע על ורציפה.

כמו כן, אם יש סדרה של חלוקות $P^{(k)}$ שפרמטר החלוקה $\lambda\left(P^{(k)}\right)$ שואף לאפס אזי גם הפרמטר חלוקה של $\lambda\left(\phi\left(P^{(k)}\right)\right)$ שואף ל 0 וכן בכיוון השני. ולכן האינטגרל $\int_\alpha f\mathbf{d}l$ קיים אם ורק אם $\int_\beta f\mathbf{d}l$ קיים והם שווים.

תרגיל 5. תהיינה $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^n, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ שתי עקומות חלקות וחח"ע בעלות אותה תמונה Γ כך שמתקיים

$$\alpha(a) = \beta(c)$$
$$\alpha(b) = \beta(d)$$

1. הוכיחו כי $\phi = \beta^{-1} \circ \alpha : [a,b] \to [c,d]$ היא פונקציה חח"ע ועל.
2. הראו כי Γ קומפקטית.
3. הראו ש β^{-1} רציפה. (הדרכה: תהי $U \subseteq [a,b]$ קבוצה סגורה. הראו ש $\beta(U)$ סגורה - מומלץ להשתמש בסדרות. הסיקו שתמונה הפוכה של קבוצה סגורה תחת β^{-1} היא גם סגורה והסיקו ש β^{-1}רציפה).
4. הראו ש $\beta^{-1} \circ \alpha$ רציפה ומונוטונית עולה ממש.

(א) הסיקו מהתרגיל הקודם כי לכל פונקציה f המוגדרת על Γ מתקיים כי $\int_\alpha f\mathbf{d}l$ קיים אם ורק אם האינטגרל $\int_\beta f\mathbf{d}l$ קיים ובמקרה זה

$$\int\limits_\alpha f\mathbf{d}l = \int\limits_\beta f\mathbf{d}l$$

הערה: אינטואיטיבית, תרגיל זה מראה שאין תלות בפרמטריזציה שאנחנו בוחרים בשביל לייצג עקומה כלשהיא הנתונה כקבוצה.

פתרון.

1. α ו β הן פונקציות חח"ע ועל (על Γ) ולכן יש להן הופכיות חח"ע ועל. הרכבה של פונקציות חח"ע ועל היא גם חח"ע ועל ולכן $\beta^{-1} \circ \alpha$ היא גם חח"ע ועל.
2. Γ קומפקטית כתמונה של פונצקיה רציפה על תחום קומפקטי.
3. נראה שתמונה של קבוצה סגורה תחת β היא קבטמה סגורה. תהי $A \subseteq [c,d]$ קבוצה סגורה. לפי משפט שלמדנו באינפי 3 ובטופולוגיה, תת קבוצה של קבוצה קומפקטית היא קומפקטית ולכן $\beta(A)$ היא קומפקטית ולכן סגורה. אבל $\beta(A) = \left(\beta^{-1}\right)^{-1}(A)$ כי βחח"ע ועל. ולכן תמונה הפוכה של קבוצה סגורה תחת β^{-1} היא קבוצה סגורה שזו ששקול לרציפות של β^{-1}.
4. פונ' חח"ע ועל ורציפה בין שני קטעים היא בהכרח מונוטונית ממש. לכן $\beta^{-1} \circ \alpha$ מונוטונית עולה מכיוון ש $\beta^{-1} \circ \alpha(a) = c < d = \beta^{-1} \circ \alpha(b)$.
5. ניקח $\beta^{-1} \circ \alpha$ להיות ϕ ונקבל את הדרוש.