אינפי 1 תרגיל 5־ שאלות פתוחות.

1. תהי a_n סדרה מונוטונית בעלת גבול חלקי L במובן הרחב. הוכיחו: $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

פתרון:
נוכיח עבור סדרה מונוטונית עולה. (ההוכחה עבור סדרה יורדת זהה)
קיימת תת סדרה $\{a_{n_k}\}$ שמקיימת $\lim_{k\to\infty} a_{n_n} = L$.
מקרה ראשון: $L = \infty$.
יהי r מספר ממשי. יש k_0 שהחל ממנו $a_{n_k} > r$. מכיוון שa_n מונוטונית, אז לכל $n > n_{k_0}$מתקיים $a_n > r$. לכן $a_n \to \infty$.
מקרה שני: $L \in \mathbb{R}$.
תת סדרה של סדרה מונוטונית היא גם כן סדרה מונוטונית. לכן, a_{n_k} היא סדרה מונוטונית עולה. ידוע שסדרה מונוטונית עולה וחסומה מתכנסת לsupשלה. נובע מכך ש $L = \sup\{a_{n_k}\}$. נוכיח ש$L = \sup\{a_n\}$.
ובכן, לכל n יש k כך ש $n < n_k$ (מהגדרה של תת סדרה). ממונוטוניות a_n נקבל $a_n \leq a_{n_k} \leq L$. לכן L הוא חסם מלעיל של הסדרה.
מצד שני, יהי $\epsilon > 0$. $L - \epsilon$ הוא לא חסם מלעיל של $\{a_{n_k}\}$, כלומר יש k כך ש $L - \epsilon < a_{n_k}$. נובע מכאן ש $L - \epsilon$ לא חסם מלעיל של $\{a_n\}$. כלומר, $L = \sup\{a_n\}$.
מכיוון שa_n מונוטונית עולה, $L = \lim a_n$.

2. תהי a_n סדרה, ונניח שמתקיים

$$\lim_{k\to\infty} a_{3k} = \lim_{k\to\infty} a_{3k-1} = \lim_{k\to\infty} a_{3k-2} = -\infty$$

.

הוכיחו: $a_n \to -\infty$.
יהי $r \in \mathbb{R}$. מכיוון ש

$$\lim_{k\to\infty} a_{3k} = \lim_{k\to\infty} a_{3k-1} = \lim_{k\to\infty} a_{3k-2} = -\infty$$

יש k_0 כך שלכל $k \geq k_0$ מתקיים $a_{3k} < r$. כמו כן, יש k_1 כל שלכל $k \geq k_1$ מתקיים $a_{3k-1} < r$, וk_2 כך שלכל $k \geq k_2$ מתקיים $a_{3k-2} < r$.
נקח $n_0 = \max\{3k_0, 3k_1 - 1, 3k_2 2\}$ ונקבל שלכל $n \geq n_0$ $a_n < r$.
הסבר: אם $n = 3k$, אז מכיין ש $n \geq n_0 \geq 3k_0$ נקבל ש $a_n = a_{3k} < r$.
אם $n = 3k - 1$, אז מכיין ש $n \geq n_0 \geq 3k_1 - 1$ נקבל ש $a_n = a_{3k-1} < r$.
ואם אם $n = 3k - 2$, אז מכיין ש $n \geq n_0 \geq 3k_2 - 2$ נקבל ש $a_n = a_{3k-2} < r$.
מסקנה: $a_n \to \infty$