

תרגיל 7

סימונים: $R(A)$ - מרחב השורה, $C(A)$ - מרחב העמודה, $N(A)$ - מרחב האפס - של מטריצה A .

שאלה 1 (ממבחן)

א. תהיינה מטריצות $A, B \in F^{n \times n}$ כך ש: $C(B) \cap N(A) = \{0\}$. יש להוכיח כי $rank(A) \geq rank(B)$.

ב. יהיו V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{Z}_2 משני איברים ו- $U \subseteq V$ תת מרחב. נניח כי $dim(V) = 2, dim(U) = 1$. חשבו את מספר תתי המרחב $W \subseteq V$ השונים כך ש: $V = U \oplus W$.

שאלה 2 (ממבחן)

הוכיחו שעבור מטריצות $A, B \in F^{m \times n}$ מתקיים:

א. $rank(A + B) \leq rank(A) + rank(B)$ (למשל ניתן להראות כי

$$C(A + B) \subseteq C(A) + C(B), \text{ ולהמשיך } \dots)$$

ב. $|rank(A) - rank(B)| \leq rank(A + B)$.

שאלה 3

א. מיצאו קבוצות פורשות עבור מרחב השורה, מרחב העמודה ומרחב האפס

$$\text{של המטריצה } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

ב. מיצאו וקטורים כאלו שיחד עם וקטורי השורה של המטריצה הנ"ל, ייצרו קבוצה הפורשת את כל \mathbb{R}^4 (אליו שייכים וקטורי השורה ...) (התייחסות לכך במערך תירגול 7 ...).

שאלה 4

בהינתן מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ שמקיימת $N(A) = \{0\}$, מהו $rank(A)$?

שאלה 5

במרחב $\mathbb{R}_2[x]$ (פולינומים עם מקדמים ממשיים ממעלה קטנה שווה לשתיים) נתונה קבוצה של וקטורים $B := \{1, t + 2, (t + 2)^2\}$. הראו כי היא בסיס ומצאו וקטור הקואורדינטות של הוקטור $3t^2 + 2t + 5$ ביחס לבסיס זה.