זהבית צבי©

גיאומטריה אקסיומטית, אקסיומות החפיפות- פתרון תרגיל 3

להגשה בתאריך 27.12.16

תרגיל 1

אם ב-ΔABC נתון $AB \cong AC$ אז $\sphericalangle B = \sphericalangle C$.

הוכחה

נתאים את הקודקודים $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$, $C \leftrightarrow B$.

לפי ההנחה שתי הצלעות AB ו-AC חופפות, לפי יחס סימטריות נקבל שאפשר להפוך:
$AC \cong AB \Leftrightarrow AB \cong AC$. לפי אקסיומה $C-5$ כל זווית חופפת לעצמה ולכן $\sphericalangle A \cong \sphericalangle A$.

לפי אקסיומה $C-6$ צלע זווית צלע $\Delta ABC \cong \Delta ACB$.

$\Leftarrow$ לפיכך שהמשולשים חופפים כל הצלעות והזויות חופפות בהתאמה ובפרט נקבל $\sphericalangle B = \sphericalangle C$.

תרגיל 2

- אם ידוע $AB > CD$ ו-$CD \cong EF$, אז $AB > EF$.

הוכחה

נתון כי $AB > CD$. לפי הגדרת היחס $>$ בין קטעים, קימת נקודה P בין A ו- B כך ש- $AP \cong CD$. נתון גם $CD \cong EF$, אז לפי אקסיומה $C-2$ מקבלים $AP \cong EF$ ושוב לפי הגדרת $>$: $AB > EF$.

- אם $AB < CD$ ו-$CD < EF$ אז $AB < EF$ (טרנזיטיביות).

הוכחה

מכיוון ש- $AB < CD$, קימת נקודה P בין C ו- D כך ש- $AB \cong CP$. מכיוון שנתון כי $CD < EF$ קימת נקודה Q בין E ל F כך ש- $CD \cong EQ$. לפי משפט $C-3$ קימת נקודה יחידה R בין E ל- Q, כך ש- $CD \cong ER$.
מכיוון שגם $AB \cong CP$, לפי אקסיומה $C-2$ מקבלים $AB \cong ER$. לפי בחירת הנקודות Q, R מתקיימים היחסים: $E*R*Q$ ו- $E*Q*F$.
לפי משפט $B.3$ מתקים $E*R*F$, לכן $ER < EF$ ובסה"כ $AB < EF$.

תרגיל 3

א. זוויות קודקודיות הן חופפות זו לזו.
ב. כל זווית שחופפת לזווית ישרה היא בעצמה זווית ישרה.

הוכחה

א. $\sphericalangle ABC$ היא משלימה ל- 180° עבור זווית $\sphericalangle ABE$
$\sphericalangle DBE$ היא משלימה ל- 180° עבור זווית $\sphericalangle ABE$
לפי אקסיומה $C-5$ $\sphericalangle ABE \cong \sphericalangle ABE$ ולכן לפי משפט $C-5$ זוויות שמשלימות ל- 180° של זוויות חופפות ($\sphericalangle ABE$) הן חופפות $\Leftarrow$ $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DBE$. מש"ל

ב . נניח $\sphericalangle ABC$ היא זווית ישרה ונתון $\sphericalangle DEF \cong \sphericalangle ABC$.
צריך להוכיח ש$\sphericalangle DEF$ ישרה.
נניח שנקודה P היא על הקרן ההפוכה ל-$\overrightarrow{BC}$ ונקודה Q היא על הקרן ההפוכה ל-$\overrightarrow{EF}$.
לפי הגדרת זווית ישרה צריך להוכיח ש-$\sphericalangle DEF \cong \sphericalangle QED$.
נתון כי $(*)$ $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$. לפי משפט $C-5$ זוויות המשלימות ל-180° של זוויות חופפות הן חופפות, כלומר $(**)$ $\sphericalangle DEQ \cong \sphericalangle ABP$.
לפי הגדרה ש-$\sphericalangle ABC$ זווית ישרה היא חופפת למשלימה שלה כלומר $(***)$ $\sphericalangle ABP \cong \sphericalangle ABC$.
ולכן לפי אקסיומה $C-5$ $\sphericalangle DEQ \cong \sphericalangle ABC$.
לפי $(**)$ ו-$(***)$ ושוב לפי אקסיומה $C-5$ והמסקנות שהגענו אליהם,
$\sphericalangle DEQ \cong \sphericalangle DEF \Leftarrow \sphericalangle DEF$ ישרה עפ"י הגדרה.

תרגיל 4

אם ב-ΔABC יש לנו $\sphericalangle B = \sphericalangle C$ אז $AB \cong AC$ ו-ΔABC שווה שוקים.

הוכחה

נחשיב את ההתאמה של הקודקודים $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$, $C \leftrightarrow B$.

לפי אקסיומה $C-2$, $BC \cong BC$ כל קטע חופף לעצמו.

נתון $\sphericalangle B = \sphericalangle C$ לפי משפט $C-8$ קריטריון ז.צ.ז $\Delta ABC \cong \Delta ACB$.

לכן לפי הגדרת משולשים חופפים נקבל ש-$AB \cong AC$ ומכאן נובע ש-ΔABC שווה שוקים.

תרגיל 5

נתון קרן $\overrightarrow{BG}$ בין $\overrightarrow{BA}$ ל- $\overrightarrow{BC}$, קרן $\overrightarrow{EH}$ בין $\overrightarrow{ED}$ ל-$\overrightarrow{EF}$, $\sphericalangle CBG \cong \sphericalangle FEH$ ו- $\sphericalangle DEF \cong \sphericalangle ABC$. הוכיחו כי $\sphericalangle HED \cong \sphericalangle GBA$.

הוכחה

נניח בשלילה כי $\sphericalangle HED \ncong \sphericalangle GBA$.
לפי אקסיומה $C-4$ קימת קרן יחידה $\overrightarrow{EX}$ בצד נתון של הישר $\overleftrightarrow{EH}$ כך
ש-$\sphericalangle HEX \cong \sphericalangle GBA$, ולכן $\overrightarrow{EX} \neq \overrightarrow{ED}$ קרן יחידה שמקימת את חפיפת הזוויות.
נתון $\sphericalangle FEH \cong \sphericalangle CBG$ ולפי הנחת השלילה $\sphericalangle GBA \cong \sphericalangle HEX$. לכן לפי משפט $C-10$
נקבל $\sphericalangle XEF \cong \sphericalangle ABC$.
בנוסף נתון $\sphericalangle DEF \cong \sphericalangle ABC$ ולכן לפי אקסיומה $C-5$ נקבל: $\sphericalangle XEF \cong \sphericalangle DEF$.
לפי יחידות הקרן שתתן שוויון בין זוויות אלו חיב להתקים $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EX}$ וקיבלנו סתירה להנחה
$\Leftarrow \sphericalangle HED \cong \sphericalangle GBA$. מש"ל.

תרגיל 6

- אם ידוע $\sphericalangle Q < \sphericalangle P$ ו-$\sphericalangle R \cong \sphericalangle Q$, אז $\sphericalangle R < \sphericalangle P$.

הוכחה

נסמן $\sphericalangle P = \sphericalangle ABC$, $\sphericalangle Q = \sphericalangle DEF$ ו- $\sphericalangle R = \sphericalangle GHI$.
מכיוון שנתון כי $\sphericalangle DEF < \sphericalangle ABC$, קימת קרן $\overrightarrow{BX}$ בין $\overrightarrow{BA}$ ל-$\overrightarrow{BC}$ כך ש-
$\sphericalangle DEF \cong \sphericalangle XBC$. לפי אקסיומה $C-5$ $\sphericalangle GHI \cong \sphericalangle XBC$, לכן $\sphericalangle GHI < \sphericalangle ABC$.

בהצלחה ☺