# אלגברה לינארית 1 תרגול 7 תשפא

25 ביולי 2021

## 1 אי־תלות ופרישה

תרגילים:

1. יהא $V$ מ"ו, $S_1, S_2 \subseteq V$. הוכיחו: אם $S_1 \subseteq S_2$ אז $span(S_1) \subseteq span(S_2)$.

פתרון: יהי $v \in span(S_1)$, זאת אומרת שיש $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}, v_1, \ldots, v_n \in S_1$ כך ש־

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

כעת, מההכלה $S_1 \subseteq S_2$ נקבל $v_1, \ldots, v_n \in S_2$, ולכן $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ הוא צ"ל של וקטורים מ־$S_2$, מה שאומר:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in span(S_2)$$

2. שאלת המשך: האם הכיוון ההפוך נכון? כלומר, נניח שנתון $span(S_1) \subseteq span(S_2)$. הוכיחו או הפריכו: $S_1 \subseteq S_2$.

הפרכה: ניקח $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. קל לראות ש־ $span(S_1) = span(S_2)$, אבל כמובן $S_1 \nsubseteq S_2$.

3. יהא $V$ מ"ו, $v_1, v_2 \in V$. הוכיחו: $v_1, v_2$ ת"ל אמ"ם ($v_1$ כפולה של $v_2$ או $v_2$ כפולה של $v_1$).

פתרון: $\Leftarrow$: מהנתון נקבל שיש $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ כך ש־ $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$. בה"כ $\alpha \neq 0$ ואז נקבל שאפשר לחלק בו ולכן $v_1 = \frac{-\beta}{\alpha} v_2$, ולכן $v_1$ כפולה של $v_2$.

$\Rightarrow$: נתון שאחד הוקטורים הוא כפולה של השני, בה"כ $v_1 = \alpha v_2$. ואז הצירוף הלינארי הלא טריוויאלי $-1 \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2 = 0$ מלמד על תלות לינארית.

4. במרחב $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ נגדיר:

$$S = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(א) מצאו מטריצה $A \notin span(S)$, אם אפשר.

פתרון: איך נראות מטריצות ב $span(S)$?

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in span(S) \iff \exists a, b, c \in \mathbb{R} : A = aA_1 + bA_2 + cA_3$$

נקבל:

$$\begin{cases} a + 2b + c = x \\ a - c = y \\ b + c = z \\ a + 3b = w \end{cases}$$

אנחנו מקבלים את המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 1 & 0 & -1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 1 & 3 & 0 & w \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & -2 & -2 & y-x \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & -1 & w-x \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & -2 & -2 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & z+\frac{y-x}{2} \\ 0 & 0 & -2 & w+\frac{y-x}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & -2 & -2 & y-x \\ 0 & 0 & -2 & w+\frac{y-x}{2} \\ 0 & 0 & 0 & z+\frac{y-x}{2} \end{array}\right)$$

ולכן $z+\frac{y-x}{2}=0 \iff A\in span(S)$, ולכן למשל $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin span(S)$.

(ב) האם $S$ בת"ל?

פתרון: בעצם שואלים אותנו את השאלה הבאה: נניח $aA_1+bA_2+cA_3=0$, האם זה גורר $a=b=c=0$? כלומר, שואלים אותנו האם למערכת ההומ' המיוצגת ע"י

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

יש פתרון לא טריוויאלי? דירגנו כבר, והגענו לצורה המדורגת (אמנם לא קנונית, אבל פחות חשוב כרגע):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

וכיון שאין משתנה חופשי, אז יש פתרון יחיד למערכת, הלא הוא פתרון האפס, ולכן אין פתרון לא טריוויאלי, והוקטורים בת"ל.

5. יהא $V$ מ"ו, $A,B\subseteq V$ קב'. הוכיחו או הפריכו:

(א) $span(A)\Delta span(B)\supseteq span(A\Delta B)$

(ב) $span(A)\Delta span(B)\subseteq span(A\Delta B)$

פתרון: א. נעשה יותר מהפרכה. בד"כ הפרכה דורש למצוא דוגמא נגדית לטענה. אנחנו נוכיח שתמיד הטענה לא נכונה. במילים אחרות: לכל קבוצות $A,B\subseteq V$ אין הכלה: הוכחה: תמיד מתקיים: $\forall S\subseteq V: 0\in span(S)$, ולכן אצלנו:

$$0\in span(A\triangle B)$$

$$0\in span(A), span(B)\Rightarrow 0\notin span(A)\triangle span(B)$$

ולכן $span(A)\Delta span(B)\not\supseteq span(A\Delta B)$. אם בכל זאת רוצים דוגמא ספציפית, אז יקח $A=B=\emptyset$. ואז

$$span(A\triangle B)=span(\emptyset)=\{0\}$$

$$span(A)\triangle span(B)=\emptyset$$

ב. נסיון הוכחה שלא עובד: יהי $v\in span(A)\triangle span(B)$ זאת אומרת שיש $v_1,\dots,v_n\in A, \alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ כך ש־ $v=\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, ובנוסף, לכל $u_1,\dots,u_k\in B, \beta_1,\dots,\beta_k\in\mathbb{F}$ נקבל $v\neq\sum_{i=1}^k\beta_i u_i$. היינו רוצים לומר ש־

$v_1,\ldots,v_n \notin B$ אך זה לא בהכרח נכון, אולי חלקם כן?

הפרכה: ניקח $V=\mathbb{R}^2, A=\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}, B=\{e_1\}$" ואז נקבל:

$$span(A)=\mathbb{R}^2, span(B)=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$$

ולכן

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\in span(A)\wedge\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\notin span(B)\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\in span(A)\triangle span(B)$$

אבל

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\notin span(A\triangle B)=span\left(e_2\right)=\left\{\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}, y\in\mathbb{R}\right\}$$

ולכן אין הכלה.

6. יהא $V=\mathbb{F}^n$ מ"ו, $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו: ($A$ הפיכה) אמ"ם (לכל $v_1,\ldots,v_m$ בת"ל מתקיים ש־ $Av_1,\ldots,Av_m$ בת"ל).

פתרון: טענת עזר: $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה אמ"ם לכל $v\neq 0$ מתקיים $Av\neq 0$.

הוכחת טענת עזר: אם $A$ הפיכה אז לאחר דירוג נקבל את $I_n$, ולכן אין משתנה חופשי ב־ $A$ ולמערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד שהוא $x=0$. לכן לכל $v\neq 0$ מתקיים $Av\neq 0$.

בכיוון ההפוך, אם $A$ לא הפיכה, אז לאחר דירוג יש , מריבועיות, משתנה חופשי, ולכן יש פתרון לא טריוויאלי.

כעת ניגש לפתרון השאלה: $\Leftarrow$: נתון ש־ $A$ הפיכה. תהי $v_1,\ldots,v_m$ קבוצה בת"ל. צריך להוכיח: $Av_1,\ldots,Av_m$ בת"ל. כלומר, צריך להוכיח שאם

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i A v_i=0$$

אז $\forall i:\alpha_i=0$. הוכחה: נניח שאכן $\sum_{i=1}^m \alpha_i A v_i=0$. נקבל:

$$0=\sum_{i=1}^m \alpha_i A v_i=\sum_{i=1}^m A(\alpha_i v_i)$$

כעת לפי חוק הפילוג נקבל:

$$0=A\cdot\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i\right)$$

כעת מהפיכות $A$, ולפי טענת העזר, נקבל:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i=0$$

ומכיון ש־ $v_1,\ldots,v_m$ בת"ל, אז מתחייב $\forall i:\alpha_i=0$. מש"ל.

$\Rightarrow$: שימו לב שלכל $v\neq 0$ מתקיים שהקבוצה $\{v\}$ היא בת"ל, כי אם $\alpha v=0$ אז בהכרח $\alpha=0$. אז יהי $v\neq 0$, ומכיון שהקבוצה $\{v\}$ בת"ל, נקבל מהנתון שגם הקבוצה $\{Av\}$ בת"ל, ולכן $Av\neq 0$ (כי וקטור האפס תמיד ת"ל). בסה"כ קיבלנו:

$$\forall v\neq 0: Av\neq 0$$

ולפי טענת העזר זה בדיוק אומר ש־$A$ הפיכה.

7. תהי $S\subseteq V$ כך ש־ $0\in S$ הוכיחו ש־ $S$ ת"ל.

הוכחה: ניקח את הצירוף הלינארי הלא טריוייאלי $1\cdot 0=0$, מה שאומר שהקבוצה תלויה לינארית.

## 2 בסיס ומימד

$V$ מ"ו. קבוצה $B \subseteq V$ של וקטורים המקיימת:

- $B$ בת"ל
- $span(B) = V$

נקראת בסיס. גודל בסיס נקרא מימד המרחב.

תרגילים:

1. עבור $W_2 = span\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $W_1 = \left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} : \begin{array}{c} a-3b-5c=d \\ 4b+8c-2d=2a\end{array}\right\}$. מצאו בסיס ל- $W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1+W_2$.

פתרון: לגבי $W_2$: "קל לראות" שהוקטורים בת"ל, ולכן הבסיס הוא:

$$B_{W_2} = \left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

לגבי $W_1$: זה מרחב הפתרונות של המערכת המיוצגת ע"י $\begin{pmatrix}1 & -3 & -5 & -1\\ -2 & 4 & 8 & -2\end{pmatrix}$, וכפי שראינו בתרגול הקודם נקבל:

$$N\begin{pmatrix}1 & -3 & -5 & -1\\ -2 & 4 & 8 & -2\end{pmatrix} = N\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \left\{t\begin{pmatrix}-5\\-2\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix} \mid t,s\in\mathbb{R}\right\}$$

ולכן:

$$B_{W_1} = \left\{\begin{pmatrix}-5\\-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

לגבי $W_1+W_2$: תרגיל בשיעורי הבית אומר:

$$span(A\cup B) = span(A) + span(B)$$

אצלנו:

$$W_1 + W_2 = span(B_{W_1}) + span(B_{W_2}) = span(B_{W_1}\cup B_{W_2}) =$$

$$= span\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נותר להוכיח שקבוצה זו בת"ל. בעצם צריך לבדוק אם יש פתרון לא טריוויאלי למערכת:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 2 & -9 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_3 + 5R_4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה מדורגת ללא משתנה חופשי, ולכן הפתרון היחיד הוא הטריוויאלי, והקבוצה בת"ל. ולכן

$$B_{W_1+W_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

הערה: בהינתן קבוצת וקטורים שרוצים לבדוק אם בת"ל. לוקחים צירוף לינארי של הוקטורים, שנותן את וקטור האפס, זה נותן מערכת משוואות הומוגנית, ואם יש לה פתרון לא טריוויאלי אז הקבוצה ת"ל, ואם רק פתרון טריוויאלי אז הקבוצה בת"ל.

לגבי $W_1 \cap W_2$. כפי שאמרנו בתרגול הקודם, אם יש לנו מטריצות $A, B$ כך ש־ $W_1 = N(A), W_2 = N(B)$ אז נקבל:

$$W_1 \cap W_2 = N \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

אצלנו:

$$W_1 = N \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

נותר לרשום את $W_2$ כמרחב פתרונות של מערכת הומ', ואז די סיימנו. נשים לב שמתקיים:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in span \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \iff \exists a, b : a \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

וזה קורה אמ"ם יש פתרון למערכת הבאה:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & w \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & x - 2z \\ 0 & 0 & y + z - w \\ 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & w \end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון אמ"ם

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + z - w = 0 \end{cases}$$

כלומר:

$$W_2 = span\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = N\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 0\\0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$W_1 \cap W_2 = N\begin{pmatrix}1 & -3 & -5 & -1\\-2 & 4 & 8 & -2\\1 & 0 & -2 & 0\\0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix} = N\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 5\\0 & 1 & 1 & 2\\1 & 0 & -2 & 0\\0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix} = N\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} =$$

$$span\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

וכמובן:

$$B_{W_1 \cap W_2} = \left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$