# תרגולים 10־14 - מרטינגלים - תשע"ט

9 במאי 2019

- **תוחלת מותנה**

1. יהי מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ויהיו זוג משתנים מקריים $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$. אנו מכירים הסתברות מותנית המוגדרת באופן הבא:

$$\forall_{A,B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}\mathbb{P}(X \in A \,|\, Y \in B) = \frac{\mathbb{P}(X \in A\,,\, Y \in B)}{\mathbb{P}(Y \in B)}$$

בהתאמה נגדיר תוחלת מותנית:

2. עבור $X$ משתנה מקרי בדיד ו־$Y$ מ"מ כלשהו. כאשר נרצה להתנות במאורע מדיד לפי $Y$

$$\forall_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}\mathbb{E}[X \,|\, Y \in A] = \sum_{t_k\in Im(X)} t_k\mathbb{P}(X = t_k \,|\, Y^{-1}(A))$$

3. עבור $X$ משתנה מקרי רציף ו־$Y$ מ"מ כלשהו. כאשר נרצה להתנות במאורע לפי $Y$

$$\mathbb{E}[X \,|\, Y \in A] = \frac{1}{\mathbb{P}(Y \in A)} \cdot \int\limits_{Y^{-1}(A)} X d\mathbb{P}$$

$$= \frac{\cdot \int\limits_{Y^{-1}(A)} X d\mathbb{P}}{\int\limits_{Y^{-1}(A)} d\mathbb{P}} = \frac{\mathbb{E}(X \cdot 1_{Y^{-1}(A)})}{\mathbb{P}(Y \in A)}$$

$$\mathbb{E}[X \,|\, Y \in A] = \frac{\mathbb{E}(X \cdot 1_{Y^{-1}(A)})}{\mathbb{E}(1_{Y^{-1}(A)})}$$

4. **הערה** ־ ההגדרות הללו תקפות עבור מאורע יחיד. ניתן לחשוב על תוחלת מותנית במאורע $A$ כ־"מרכז המסה" של המרחב על $A$. באופן מאוד דומה לתוחלת רגילה של המתשנה המקרי .

5. **תמונה**

6. ההגדרות לתוחלת מותנית עבור מאורע מדיד ספציפי ($\mathbb{E}[X\mid A]$) מאפשר לנו לשאול האם ניתן להכליל את ההגדרה לאוסף של מאורעות? במקרה שלנו, לסיגמא אלגברה.

(א) **<u>דוגמא</u>**

i. נגדיר קוביה הוגנת עם 6 צדדים ומרחב מדגם סימטרי. כלומר $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ כאשר

א'. $\Omega=\{1,2,...,6\}$

ב'. $\mathcal{F}=2^{\Omega}$

ג'. $\forall_{a\in\{1,2,...,6\}}\mathbb{P}(\{a\})=\frac{1}{6}$.

ii. עתה, נשנה את הסיגמא אלגברה ונבחר

$$\mathcal{F}=\{\emptyset,\{1,2\},\{3,4,5,6\},\Omega\}$$

משמעות ה־ "שינוי" בסיגמא אלגברה היא **<u>שאיננו יכולים להבדיל בין מאורעות מסוימים באמצעותה</u>** כלומר, יש רק 2 תוחלות מותנות לא טריוויאליות בסיגמא אלגברה:

$$\mathbb{E}[X\mid\{1,2\}]=\frac{\mathbb{E}(X\cdot 1_{\{1,2\}})}{\mathbb{P}(\{1,2\})}=\frac{\frac{1}{6}(1+2)}{\frac{2}{6}}=\frac{3}{2}$$

$$\mathbb{E}[X\mid\{3,...,6\}]=\frac{\mathbb{E}(X\cdot 1_{\{3,...,6\}})}{\mathbb{P}(\{3,4,...,6\})}=\frac{\frac{1}{6}(3+...+6)}{\frac{4}{6}}=\frac{9}{2}$$

כאשר

$$\mathbb{E}[X\mid\emptyset]=0$$

$$\mathbb{E}[X\mid\Omega]=\mathbb{E}[X]=\frac{7}{2}$$

7. תוחלת מותנית של משתנה מקרי $X$ בסיגמא אלגברה $\mathbb{E}[X\mid\mathcal{F}]$ היא משתנה מקרי.

ניתן לחשוב עליו באופן הבא:

יהיו $\{B_i\}_{i\in I}$ אוסף לכל היותר בן מניה של קבוצות זרות $B_i \subseteq \Omega$ כאשר

$$\uplus B_i = \Omega$$

. אזי אם

$$\mathcal{F} = \sigma(\{B_i\}_{i\in I})$$

במרחב ההסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. אזי אם $X \in L^1$ התוחלת המותנה היא משתנה מקרי

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] : \Omega \to \mathbb{R}$$

המקיימת

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}](\omega) = \mathbb{E}[X \mid B_i] \Leftrightarrow \omega \in B_i$$

8. <u>**הגדרה א':**</u>

משתנה מקרי $Y$ נקרא "התוחלת המותנית" של $X$ בהנתן $\mathcal{F}$ ותסומן $Y = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$ אם:

(א) $Y$ פונקציה מדידה לפי $\mathcal{F}$

(ב) $\forall_{A\in\mathcal{F}} \mathbb{E}[X \cdot 1_A] = \mathbb{E}[Y \cdot 1_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \cdot 1_A]$

9. <u>**הגדרה ב':**</u>

אם $Z$ משתנה מקרי ו־ $X \in L^1$ אזי מתקיים:

$$Y = \mathbb{E}[X \mid Z] = \mathbb{E}[X \mid \sigma(Z)]$$

10. <u>**משפט:**</u>

התוחלת המותנית $Y = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$ קיימת ויחידה כמעט תמיד .

11. <u>**תכונות:**</u> יהי $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ו־ $X, Y \in \mathcal{L}^1$ משתנים מקריים נגדיר $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ סיגמא אלגבראות.

(א) <u>לינאריות</u> ־ $\mathbb{E}[\lambda X + Y \mid \mathcal{F}] = \lambda \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] + \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}]$

(ב) <u>מונוטוניות</u> ־ אם $X \geq Y$ $a.s$ אזי $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \geq \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}]$

(ג) $\mathbb{E}[|XY|] < \infty$ ו־ $Y$ מדיד לפי $\mathcal{F}$. אזי

$$\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{F}] = Y \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$$

וכן,

$$\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}] = Y$$

(ד) <u>מגדל התוחלות</u> ־

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{F}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$$

(ה) <u>אי שיוויון המשולש</u> ־

$$|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]| \leq \mathbb{E}[|X| \mid \mathcal{F}]$$

(ו) <u>אי תלות</u> ־ אם $\sigma(X)$ ו־ $\mathcal{F}$ בלתי תלויים אזי

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = \mathbb{E}[X]$$

(ז) <u>התכנסות נשלטת</u> ־ יהי $Y \in L^1$, $Y \geq 0$ ו־ $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת משתנים מקריים כאשר

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} |X_n| \leq Y$$

כך ש־ $X \overset{n\to\infty}{\to} X_n$ אזי

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \quad a.s \in L^1$$

- **<u>הגדרות בדרך למרטינגל</u>**

  - **תהליך סטוכסטי** ־ יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קבוצת אינדקסים (בדידה או רציפה) ונגדיר

$$\forall_{t\in I} X_t : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$$

אזי $\{X_t\}_{t\in I}$משפחה של משתנים מקריים הנקראים תהליך סטוכסטי (אקראי).

- **פילטרציה (סינון)** - יהי $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ משפחה של סיגמא אלגבראות. $\mathbb{F}$ נקרא סינון עולה (או יורד) אם

$$\forall_{s\le t\in I}\mathcal{F}_s\subseteq\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{F}$$

ביחס למרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.

- יהי $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ סינון עולה ו- $\mathbb{X}=\{X_t\}_{t\in I}$ תהליך סטוכסטי אזי:

  * נאמר ש- $\mathbb{X}$ מכבד את הסינון $\mathbb{F}$ אם $\forall_{t\in I}X_t\in\mathcal{F}_t$ כאשר $X_t\in\mathbb{X}$ ו- $\mathcal{F}_t\in\mathbb{F}$.
  * אם $\forall_{t\in I}\mathcal{F}_t=\sigma(X_s\, s\le t)$ אזי נקרא ל- $\mathbb{F}$ "הסינון הטבעי" או "הסינון הנוצר ע"י $\mathbb{X}$"

- <u>**מרטינגל**</u>

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות. $I\subseteq\mathbb{R}$ קבוצת אינדקסים ו- $\mathbb{F}$סינון. $\mathbb{X}=\{X_t\}_{t\in I}$ תהליך סטוכסטי ממשי המכבד את הסינון $\mathbb{F}$ כך ש- $\forall_{t\in I}\mathbb{E}[|X_t|]<\infty$ יקרא:

  - מרטינגל אם $\forall_{s\le t\in I}\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]=X_s$
  - תת מרטינגל אם $\forall_{s\le t\in I}\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]\ge X_s$
  - על מרטינגל אם $\forall_{s\le t\in I}\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]\le X_s$

- <u>**תרגיל**</u> - יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות עם הסינון הטבעי:

  - יהיו $X_1,X_2,...$ סדרה של משתנים מקריים כך ש- $\forall_k\mathbb{E}(X_k)=0$
  - נגדיר :

$$S_0=0,\ \mathcal{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$$

ולכל $n\ge1$ :

$$S_n=X_1+...+X_n,\ \mathcal{F}_n=\sigma(X_1,...,X_n)$$

הוכח: $\{S_n\}$ מרטינגל.

- **פתרון**

$$\mathbb{E}(S_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n)=\mathbb{E}(S_n+X_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n)=$$

$$\mathbb{E}(S_n\,|\,\mathcal{F}_n)+\mathbb{E}(X_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n)=$$

$$S_n+\mathbb{E}(X_{n+1})=S_n$$

ולכן $\{S_n\}$ מרטינגל.

- **<u>תרגיל</u>** ־ יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות עם הסינון הטבעי:

  - יהיו $X_1,X_2,...$ סדרה של משתנים מקריים חיוביים כך ש־ $\forall_k\mathbb{E}(X_k)=1$
  - נגדיר :

$$M_0=1,\ \mathcal{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$$

ולכל $n\geq 1$ :

$$M_n=\prod_{k=1}^{n}X_k,\ \mathcal{F}_n=\sigma(X_1,...,X_n)$$

הוכח: $\{M_n\}$ מרטינגל.

  - **פתרון**

$$\mathbb{E}(M_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n)=\mathbb{E}(M_nX_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n)=$$

$$M_n\mathbb{E}(X_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n)=M_n\mathbb{E}(X_{n+1})=M_n$$

ולכן $\{M_n\}$ מרטינגל.

- **<u>אינטואיציה במחשבה על מרטינגלים ־ הימורים הוגנים</u>**

  - יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות עם הסינון הטבעי ו־ $\{X_n\}$ תהליך סטוכסטי המייצג סדרה של הימורים בזמן $n\in\mathbb{N}$.

* הזכייה בין המשחק ה־ $n-1$ למשחק ה־$n$ היא $X_{n+1} - X_n$.

- אם $X_n$ מרטינגל תוחלת הזכייה בזמן ה־ $n$ היא 0. כלומר המשחק הוגן –

$$\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \,|\, \mathcal{F}_n) = 0$$

- אם $X_n$ על־מרטינגל תוחלת הזכייה בזמן ה־ $n$ היא שלילית. כלומר המשחק הוא לרעת השחקן –

$$\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \,|\, \mathcal{F}_n) \leq 0$$