

פיסיקה למתמטיקאים אביב תש"ף

החוק השני של ניוטון

1. על חלקיק בעל מסה m פועל כח הפרופורציוני למהירות $\vec{F}(v) = -\gamma v \hat{x}$. ב $t = 0$ החלקיק נמצא בראשית ומהירותו ההתחלתית $\vec{v} = v_0 \hat{x}$. מצאו את מהירותו ומיקומו כפונקציה של הזמן.

מאינטגרציה על משוואת התנועה $v(0) = v_0$, $m\ddot{x} = m\dot{v} = -\gamma v$, נקבל

$$(1) \quad v(t) = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

ומאינטגרציה על (1) בתוספת תנאי ההתחלה $x(0) = 0$ נקבל

$$(2) \quad x(t) = \frac{mv_0}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right).$$

2. חלקיק בעל מסה m ומטען q נע באזור בו פועלים שדות מגנטי וחשמלי אחידים וקבועים בכיוון \hat{z} , $\vec{B} = B\hat{z}$, $\vec{E} = E\hat{z}$. בהתאמה.

(א) רשמו את משוואות התנועה

על החלקיק פועל כח לורנץ $\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E})$. משוואות התנועה תיכתבנה אפוא וקטורית בצורה $m\vec{a} = m\vec{\dot{v}} = \vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E})$, וברכיבים:

$$m\dot{v}_x = qBv_y, \quad (3)$$

$$m\dot{v}_y = -qBv_x, \quad (4)$$

$$m\dot{v}_z = qE. \quad (5)$$

(ב) מצאו את המהירות בהינתן $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$

נסמן $\omega = qB/m$ ונקבל

$$v_x = v_0 \cos \omega t, \quad (6)$$

$$v_y = -v_0 \sin \omega t, \quad (7)$$

$$v_z = \frac{qE}{m}t. \quad (8)$$

(ג) מצאו את המיקום בהינתן שהתנועה מתחילה בראשית מאינטגרציה על המשוואות ב (2) נקבל

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad (9)$$

$$y = \frac{v_0}{\omega} (\cos \omega t - 1), \quad (10)$$

$$z = \frac{qE}{2m}t^2. \quad (11)$$

המסלול הינו בורג בעל חתך מעגלי $(v_0/\omega)^2 = (v_0/\omega)^2 + (y + v_0/\omega)^2 = x^2$, כמתואר בשרטוט.

(ד) כמה סיבובים יבצע החלקיק עד לגובה h ?

נסמן ב t_h את הרגע בו החלקיק בגובה h . עד לנקודה זו, יבצע לכל הפחות n סיבובים. כלומר $nT \leq t_h \leq (n+1)T$ כאשר $T = 2\pi/\omega$ זמן המחזור.

על כן מספר הסיבובים הינו $n_c = [t_h/T] = [B\sqrt{qh/2mE}/\pi]$ נשים לב כי מספר הסיבובים עולה עם השדה המגנטי B (התדירות הזוויתית) ויורד עם השדה החשמלי E (התאוצה בכיוון \hat{z}).

$$x = \sin(t), y = \cos(t) - 1, z = t^2$$

