פתרון מטלה עצמית

<u>פתרון שאלה 1</u>

האם הפונקציה $f\left(x\right)=\begin{cases}4x-2 & x\le 1\\ 2x^2 & x>1\end{cases}$ רציפה ב-$\mathbb{R}$? האם היא גזירה ב-$\mathbb{R}$?

<u>רציפות</u>

עבור $x<1$ הפונקציה רציפה כפולינום; עבור $x>1$ הפונקציה רציפה כפולינום. נבדוק רציפות בנקודה $x=1$.

האם f מוגדרת ב-$x=1$? כן, ומתקיים $f\left(1\right)=2$.

נחשב גבול ב-$x=1$.

מתקיים: $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)=\underset{0\ne\Delta x\approx 0}{st}\left(f\left(1+\Delta x\right)\right)$.

בגלל שאנו לא יודעים האם $1+\Delta x$ גדול מאחד או קטן מאחד, יש לפצל למקרים.

א. $\Delta x>0$

$$\lim_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(f\left(1+\Delta x\right)\right)=\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(2\left(1+\Delta x\right)^2\right)=\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(2+4\Delta x+2\left(\Delta x\right)^2\right)=2$$

ב. $\Delta x<0$

$$\lim_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(f\left(1+\Delta x\right)\right)=\underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(4\left(1+\Delta x\right)-2\right)=\underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(4+4\Delta x-2\right)=2$$

שני הגבולות החד-צדדיים קיימים ושווים, ולכן הגבול $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)$ קיים.

האם הגבול שווה לערך הפונקציה בנקודה? כן, שהרי $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)=2=f\left(1\right)$.

לכן הפונקציה רציפה ב-$x=1$.

לסיכום: f רציפה ב-$\mathbb{R}$.

גזירות

עבור $x<1, x>1$ הפונקציה גזירה (כפולינום). לכן נבדוק את $x=1$.

מתקיים: $f'(1)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\right)$, וגם כאן יש צורך לפצל למקרים.

א. $\Delta x>0$

$$\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{f(1+\Delta x)-2}{\Delta x}\right)=\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{2(1+\Delta x)^2-2}{\Delta x}\right)=\ldots=4$$

ב. $\Delta x<0$

$$\underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{f(1+\Delta x)-2}{\Delta x}\right)=\underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{(4(1+\Delta x)-2)-2}{\Delta x}\right)=\ldots=4$$

לביטוי $\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$ יש אותו חלק סטנדרטי לכל $0\neq\Delta x\approx 0$, ולכן הנגזרת קיימת

ומתקיים $f'(1)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\right)=4$.

מכאן, f גזירה ב-$x=1$.

לסיכום: f גזירה ב-$\mathbb{R}$.

פתרון שאלה 2

לאילו ערכי $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ הפונקציה הבאה גזירה?

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b & x<1 \\ cx+d & 1\le x<3 \\ (x-4)^2-1 & x\ge 3 \end{cases}.$$

נשים לב שאם הפונקציה גזירה, אז היא בהכרח רציפה.

תחילה נשתמש ב<u>רציפות</u>.

- רציפות בנקודה $x=1$:
  צריך להתקיים: $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$.
  כלומר: $a+b=c+d=c+d$,
  ומקבלים את המשוואה $a+b-c-d=0$.
- רציפות בנקודה $x=3$:
  צריך להתקיים: $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=f(3)$.
  כלומר: $3c+d=(-1)^2-1=0$,
  ומקבלים את המשוואה $3c+d=0$.

➢ שימו לב לשתי המשוואות שקיבלנו בשלב הזה, כי אנחנו נצטרך להשתמש בהן בשלב הבא.

כעת נשתמש ב<u>גזירות</u>.

- גזירות בנקודה $x=1$:
  נגזור לפי ההגדרה, משני הצדדים.

$$\underset{0>\Delta x\approx0}{st}\left(\frac{f(1+\Delta x)-(c+d)}{\Delta x}\right)=\underset{0>\Delta x\approx0}{st}\left(\frac{a(1+\Delta x)^2+b-c-d}{\Delta x}\right)=$$

$$\underset{0>\Delta x\approx0}{st}\left(\frac{a+2a\Delta x+a(\Delta x)^2+b-c-d}{\Delta x}\right)=\underset{0>\Delta x\approx0}{st}\left(\frac{2a\Delta x+a(\Delta x)^2}{\Delta x}\right)=2a$$

המעבר האחרון התאפשר מכיוון שראינו כבר כי $a+b-c-d=0$.

$$\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{f(1+\Delta x)-(c+d)}{\Delta x}\right)=\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{c(1+\Delta x)+d-c-d}{\Delta x}\right)=c$$

על מנת שהפונקציה תהיה גזירה, נדרוש $2a=c$, ונקבל את המשוואה $2a-c=0$.

- גזירות בנקודה $x=3$:

באופן דומה מקבלים את התנאי $c=-2$.

נציב לאחור את $c=-2$ (במשוואות שקיבלנו) ונקבל את התשובה הסופית:

$a=-1, b=5, c=-2, d=6$.

פתרון שאלה 3

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{2\cos x-1}$

הגבול אינו קיים. ואמנם: יהי $H\in\mathbb{N}^*\setminus\mathbb{N}$ ונתבונן בשני מספרים אינסופיים חיוביים: $K_1=2\pi H, K_2=2\pi H+\frac{\pi}{2}$. מתקיים $\sin(K_1)=0, \quad \sin(K_2)=1$, ולכן, הגבול אינו קיים.

ב. $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

מתקיים $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{\sin^2 x}}=st\left(e^{\frac{1}{\sin^2 \Delta x}}\right)$ עבור $0\neq\Delta x\approx 0$. מכיוון ש- e^t היא פונקציה רציפה, מתקיים: $e^{st\left(\frac{1}{\sin^2 \Delta x}\right)}=st\left(e^{\frac{1}{\sin^2 \Delta x}}\right)$. כעת, מכיוון ש- $\sin t$ היא פונקציה רציפה, מתקיים: $\Delta x\approx 0 \Rightarrow \sin\Delta x\approx\sin 0=0$. לכן $\sin\Delta x$ הוא אינפי, ולכן $\sin^2\Delta x$ הוא אינפי חיובי. מכאן, $\frac{1}{\sin^2\Delta x}$ הוא אינסופי חיובי, ולכן $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\infty$.

פתרון שאלה 4

תהי f פונקציה ממשית ויהי $L \in \mathbb{R}$.

א. הוכיחו: $\lim_{x\to 0} f\left(x^3\right) = L$ אם ורק אם $\lim_{x\to 0} f\left(x\right) = L$.

<u>כיוון ראשון</u>: נתון $\lim_{x\to 0} f\left(x^3\right) = L$, כלומר,

$$(*) \quad \text{לכל } 0 \neq \varepsilon \approx 0 \text{ מתקיים } \operatorname{st}\left(f\left(\varepsilon^3\right)\right) = L.$$

צריך להוכיח ש- $\lim_{x\to 0} f\left(x\right) = L$. כלומר, צריך להוכיח שלכל $0 \neq \Delta x \approx 0$ מתקיים $\operatorname{st}\left(f\left(\Delta x\right)\right) = L$.

יהי $0 \neq \Delta x \approx 0$. אזי גם $\sqrt[3]{\Delta x}$ הוא אינפי שונה מאפס, ולכן מקיים את (*). לכן $\operatorname{st}\left(f\left(\left(\sqrt[3]{\Delta x}\right)^3\right)\right) = \operatorname{st}\left(f\left(\Delta x\right)\right) = L$, כנדרש.

<u>כיוון שני</u>: נתון $\lim_{x\to 0} f\left(x\right) = L$, כלומר:

$$(**) \quad \text{לכל } 0 \neq \Delta x \approx 0 \text{ מתקיים } \operatorname{st}\left(f\left(\Delta x\right)\right) = L.$$

צריך להוכיח ש- $\lim_{x\to 0} f\left(x^3\right) = L$, כלומר צריך להוכיח שלכל $0 \neq \varepsilon \approx 0$ מתקיים $\operatorname{st}\left(f\left(\varepsilon^3\right)\right) = L$.

יהי $0 \neq \varepsilon \approx 0$. אזי גם ε^3 הוא אינפי שונה מאפס, ולכן מקיים את תנאי (**). נציב שם ונקבל: $\operatorname{st}\left(f\left(\varepsilon^3\right)\right) = L$, כנדרש.

מש"ל

ב. נתבונן בטענה הבאה:

$\lim_{x\to 0} f\left(x^2\right) = L$ אם ורק אם $\lim_{x\to 0} f\left(x\right) = L$.

האם זו טענה נכונה? אם כן – הוכיחו; אם לא – הביאו דוגמה נגדית.

הטענה אינה נכונה. ניתן להבין זאת מההוכחה של הסעיף הקודם. נסו להבין איפה ההוכחה של א' נכשלת, כאשר מחליפים את x^3 ב- x^2.

כעת ניתן דוגמה נגדית. נתבונן בפונקציה $f(x)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$. אזי

$$f\left(x^2\right)=\frac{x^2}{|x^2|}=\begin{cases}1 & x>0\\ 1 & x<0\end{cases}.$$

לכן $\lim_{x\to 0} f\left(x^2\right)=1$ אבל הגבול $\lim_{x\to 0} f(x)$ אינו קיים.