טופולוגיה

תרגול 2

מרץ 21

והפעם...

- נקודות מבודדות
- יחסים בין מטריקות
- פונקציות רציפות
- סדרות קושי ומרחבים שלמים
- טריגונומטריה, תורת המספרים, אנליזה מרוכבת ומשוואות דיפרנציאליות

קצת ZOOM לפני שמתחילים

- נא להישאר על Mute לאורך כל השיעור, אלא אם צוין אחרת.
- מוזמנים להתמש ב-Chat כדי לשאול ולענות אחד לשני על שאלות
- אחרי כל נושא, אתן זמן לשאלות.
- במהלך השיעור אני אשתמש בסקרים אנונימים כדי להבין את מצב הכיתה

הגדרה: מטריקות שקולות

שתי מטריקות על אותו מרחב הן שקולות אם יש להן אותן סדרות מתכנסות. לפי עקרון היינה ומשפט מההרצאה, זה שקול לשיוויון של הטופולוגיות שלהן.

~~$d_1 \preceq d_2$:הכוונה~~ הפוך

~~לכל a,b~~ זה לא נכון

~~$d_1(a,b) \le d_2(a,b)$~~

הכוונה:

$$x_n \xrightarrow{d_1} x \Leftarrow x_n \xrightarrow{d_2} x \qquad d_1 \preceq d_2$$

דוגמאות: מטריקות שקולות

- מטריקות d_p עבור $1 \leq p \leq \infty$ הן שקולות על $\mathbb{R}^n$.
- אם d מטריקה, אז αd היא מטריקה שקולה לכל $\alpha \neq 0$.

בכל אחד מהסעיפים, **הוכיחו** אם המטריקות שקולות, ומצאו את היחס בין הטופולוגיות:

$p^n \xrightarrow{d_q} 0 \qquad p^n \xrightarrow{d_p} 0$

- $(\mathbb{Z}, d_p)$ ו- $(\mathbb{Z}, d_q)$ עבור $p \neq q$ ראשוניים.
- (l_1, d_1) ו- (l_1, d_∞). $l_1 := \{\{a_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum |a_i| < \infty\}$
- $\mathbb{R}^2 \supseteq \mathbb{S}^1$ עם המטריקה האוקלידית ומטריקת המרחק על המעגל.

$l_1 \subseteq l_\infty := \{\{a_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sup |a_n| < \infty\}$

$j_1 \not\supseteq j_\infty$

$(1, 0, \ldots)$

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots)$

$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots)$

$a_i^{(n)} := \begin{cases} \frac{1}{n} & i < n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

$\|\{a_i^{(n)}\}\|_\infty \leq \frac{1}{n} \to 0$

פתרון: מטריקות שקולות

הגדרה: סדרת קושי

נאמר ש- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ היא סדרת קושי אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n_0 \leq n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

הגדרה: סדרת קושי

נאמר ש- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ היא סדרת קושי אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n_0 \le n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים

- $$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

- קל לראות שזה שקול לתנאי הבא:

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}\,\{x_m\}_{m\ge n} = 0.$$

תרגיל - תכונות מאינפי

הוכיחו

- שכל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי.
- כל סדרת קושי עם תת סדרה מתכנסת, היא מתכנסת.
- כל סדרת קוש היא חסומה

תרגיל - תכונות מאינפי

הוכיחו

- שכל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי.
- כל סדרת קושי עם תת סדרה מתכנסת, היא מתכנסת.
- כל סדרת קושי היא חסומה

מי מבין שלוש הטענות הללו נראית הכי מסובכת? ענו בזום.

תרגיל - תכונות מאינפי - הוכחה

יהי $\{y_n\} \subseteq X$ סדרת קושי ונניח $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ מתכנסת ל- x.

נראה ש- $\{x_n\}$ מתכנסת גם היא ל- x.

יהי $\varepsilon > 0$ צ"ל $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $d(x_n,x) \le \varepsilon$ $\forall n_0 \le n \in \mathbb{N}$.

נתון ש- $\{x_n\}$ סדרת קושי ולכן קיים $m_0 \in \mathbb{N}$

$$\forall_{m_0 \le} n,m \in \mathbb{N} \quad d(x_n,x_m) \le \frac{\varepsilon}{2}$$

בנוסף, קיים $t_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k \ge t_0$ מתקיים:

$$d(x_{n_k},x) \le \frac{\varepsilon}{2}$$

בגלל ש- $\{x_{n_k}\}$ תת סדרה: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : n < n_k$

$$n_0 = \max m_0, t_0$$

$n > n_0 \ \exists\ n \le n_k$ $\quad d(x_n,x) \le d(x_n,x_{n_k}) + d(x_{n_k},x) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ☒

הגדרה: שלמות

מרחב מטרי יקרא שלם אם כל סדרת קושי מתכנסת.

דוגמאות: שלמות

- $\mathbb{R}^n$
- l_p, כאשר $1 \leq p \leq \infty$
- מרחב הפונקציות החסומות על קבוצה כלשהי
- על פי הגדרה, מרחבי בנך והילברט
- מרחב הפונקציות האנליטיות על $\mathbb{C}$ עם המטריקה

$$d(f,g) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \sup_{|z|\leq n} |f(z) - g(z)|$$

- לפיזיקאים שבנינו: אפשר להסתכל על הדלתא של דיראק כסדרת קושי חלשה ב-l_p.

תרגיל

האם יכולות להיות שתי מטריקות שקולות שהאחת שלמה והשניה לא?

$X := \mathbb{R}$

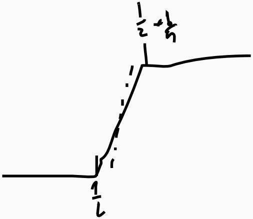
$d(x,y) := |e^x - e^y|$

$x_n := -n$

$d(x_n, x_m) \leq 2e^{\max x_n, x_m} \to 0$

עבור כל אחד מהמרחבים הבאים, מצא סדרת קושי לא מתכנסת:

- $\mathbb{Q}$ • $3, 3.1, 3.14, 3.141, \ldots$
- $(\mathbb{Z}, d_p)$ כאשר $p \neq 2$. $\sum_{i=1}^{n} p^i$
- $(C[0,1], d_1)$



תרגיל: פסאודו-מטריקה מושרית

יהי X קבוצה ו-(Y,ρ) מרחב מטרי. נניח בנוסף ש-$f : X \to Y$ פונקציה כלשהי. נגדיר פסאודו-מטריקה d על X לפי

$$d(x,y) := \rho(f(x), f(y))$$

$$d(x,z) := \rho(f(x), f(z)) \le \rho(f(x), f(y)) + \rho(f(y), f(z)) = d(x,y) + d(y,z)$$

- **הראו** שזו פסאודו-מטריקה
- מתי היא מטריקה? $\iff$ f חח״ע
- תארו את הטופולוגיה של (X,d) באמצעות הטופולוגיה על (Y,ρ).

$$B_d(x,r) := \{y \in X \mid d(x,y) < r\} = \{y \in X \mid d(f(y), f(x)) < r\}$$

$$\rho(f(x), f(y)) < r$$

$$= f^{-1}(B_\rho(f(x), r))$$

פתרון: פסאודו-מטריקה מושרית

O פתוחה ב׳ X $\iff$ קי״מ — קיימת פתוחה $V \subseteq Y$

$$O = f^{-1}(V)$$

הגדרה: נקודות מבודדות

נקודה x נקראת מבודדת במרחב X אם $\{x\}$ קבוצה פתוחה

דוגמאות: נקודות מבודדות

- למרחבים הבאים אין נקודות מבודדות: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. $A := [0,1] \cup \{2\}$
- במרחב דיסקרטי כל נקודה היא מבודדת
- ספוילר: אם כל נקודת אי רציפות של פונקציה אנליטית היא מבודדת, אז היא מנה של שתי פונקציות שלמות.

סקר: פרמה או מרסן

האם אתם מאמינים שיש אינסוף ראשוני פרמה, או אינסוף ראשוני מרסן ($2^{2^n}+1$ ו- 2^n-1 בהתאמה). ענו בבקשה בסקר בזום.

- יש רק אינסוף ראשוני מרסן אך מספר סופי של ראשוני פרמה
- יש אינסוף ראשוני פרמה אך מספר סופי של ראשוני מרסן
- יש אינסוף ראשוני פרמה וגם ראשוני מרסן
- יש כמות סופית של שני הסוגים

תרגיל: מספרי מרסן (Mersenne)

נגדיר

$$P_{-1} := \{-1\} \cup \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ is prime } \} \subseteq \mathbb{N}. \cup \{1\}$$

הוכיחו שאם -1 מבודדת ב- P_{-1} ביחס למטריקה ה-2-אדית, אז קיימים לכל היותר מספר סופי של מספרי מרסן.

נניח בשלילה יש אינסוף ראשוני מרסן $x_n := 2^{n_k} - 1$

$$d_2(-1, x_n) = |2^{n_k} - 1 - (-1)|_2 = |2^{n_k}|_2 = 2^{-n_k} \to 0$$

לפי משפט מההרצאה, -1 אינו מבודד

סתירה.

$\boxtimes$

תרגיל: השערת קולץ (Collatz)

נגדיר את הפונקציה הבאה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ע"י:

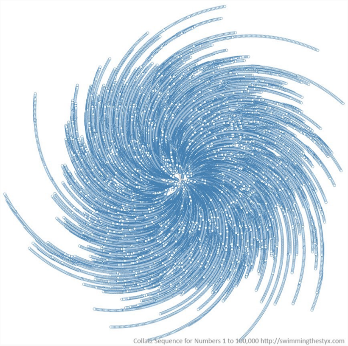
$$f(n) := \begin{cases} \frac{n}{2} n \in 2\mathbb{N} \\ 3n + 1 n \in 1 + 2\mathbb{N} \end{cases}$$

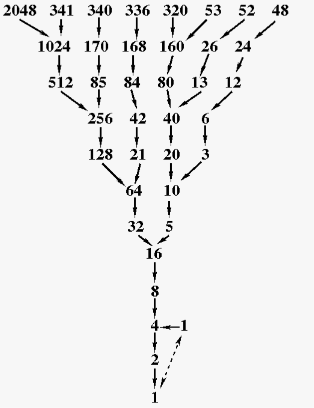
עבור $k \in \mathbb{N}$ נגדיר

$$f^{\{k\}}(n) := f(f(\ldots f(n))),$$

כלומר הפעלת k פעמים של f על n.
השערת קולץ אומרת שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש $f^{\{k\}}(n) = 1$.
הוכיחו ש- f רציפה ביחס למטריקה ה-2-אדית.

השערת קולץ: המחשה





תרגיל: פונקציה רציפה במ"ש

הוכיחו שאם $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ רציפה במ"ש אז התמונה של סדרת קושי היא סדרת קושי.

הראו שזה לאו דווקא נכון עבור פונקציה רציפה.

הוכחה: יהי $\{x_n\}\subseteq X$ סדרת קושי, צ"ל $\{f(x_n)\}\subseteq Y$ סדרת קושי

יהי ε צ"ל $n_0\in\mathbb{N}$ $\rho(f(x_n),f(x_m))\le\varepsilon$ $\forall n_0\le n,m\in\mathbb{N}$

קיים δ כך שעבור $d(x,y)\le\delta \Rightarrow \rho(f(x),f(y))\le\varepsilon$

נתון ש-$\{x_n\}$ סדרת קושי ולכן $n_1\in\mathbb{N}$ כך ש

$\forall n_1\le n,m\in\mathbb{N}:$ $d(x_n,x_m)\le\delta \Rightarrow \rho(f(x_n),f(x_m))\le\varepsilon$

$\blacksquare$

תרגיל: פסאודו-מטריקה

יהי (X,d) מרחב פסאודו-מטרי. נגדיר יחס שקילות על X לפי

$$x \sim y \iff d(x,y) = 0.$$

$x \sim y \sim z \overset{?}{\Rightarrow} x \sim z$

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \leq 0+0 = 0 \Rightarrow x \sim z$

- **הראו** שזה אכן יחס שקילות
- הוכיחו שהמטריקה $\bar{d}$ שמוגדרת על $X/\sim$ כ- $\boxed{\bar{d}(\bar{x},\bar{y}) := d(x,y)}$ עבור $\bar{x},\bar{y} \in X/\sim$ מוגדרת היטב והיא באמת מטריקה.
- **הוכיחו** שהעתקת המנה $\rho : X \to X/\sim$ משמרת מרחקים. הסבירו מדוע היא לא תמיד תהיה איזומטריה.

$x_1 \sim x_2,\ y_1 \sim y_2 \overset{?}{\Rightarrow} d(x_1,y_1) = d(x_2,y_1)$

$d(x_1,y_1) \leq \cancel{d(x_1,x_2)} + d(x_2,y_1) \leq d(x_2,y_2) + \cancel{d(y_2,y_1)}$

$d(x_1,y_1) = d(x_2,y_2)$

הוכיחו שאם (X, d) מרחב מטרי שלם ותהי $f : X \to X$ פונקציית ליפשיץ עם מקדם $\alpha < 1$.
הוכיחו שקיימת נקודת שבת אחת ויחידה, כלומר כזו שמקיימת $f(x) = x$.
אתגר: **הוכיחו** באמצעות התוצאה הזו את משפט הקיום והיחידות של מד"ר

הוכחה: משפט נקודת השבת

נבחר $x_0 \in X$ כלשהו ונגדיר $x_{n+1} = f(x_n)$

המטרה היא להראות ש- $\{x_n\}$ היא סדרת קושי ולכן מתכנסת ל-x

$$f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x$$

1. לכל n נגדיר $s_n := d(x_n, x_{n+1})$

נוכיח

$$s_n \le \alpha^n s_0$$

2. לכל n_0 נגדיר $t_k := d(x_{n_0}, x_{n_0+k})$

$$t_k \le s_{n_0} \cdot \alpha^k$$

3. $n_0 \le n, m \in \mathbb{N}$: $d(x_n, x_m) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} s_0$

$$d(x_n, x_m) \le \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) = \sum t_k = s \sum_{n_0} \alpha^k \le \frac{1}{1-\alpha} s_{n_0} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \alpha^n s_0 \to 0$$

בונוס: למת שוורץ והנגזרת

נתבונן במרחב H של הפונקציות האנליטיות בסביבה של דיסק היחידה $D \subseteq \mathbb{C}$ יחד עם נורמת ה-max:

$$\|f\| := \max_{z \in D} |f(z)|.$$

שימו לב שמשפט ויירשטראוס מבטיח שהמקסימום הזה אכן קיים.

- למת שוורץ אומרת שאם $\|f\| \leq 1$ אז $|f'(0)| \leq 1$. **הוכיחו** שפונקציית הנגזרת ב-0, כלומר הפונקציה $\partial_0 : H \to \mathbb{R}$ שמוגדרת ע"י

$$\partial_0(f) := f'(0)$$

היא פונקציית ליפשיץ.

- הראו שהטענה הזו לא נכונה אם מסתכלים על פונקציות גזירות ברציפות אינסוף פעמים מעל $[0, 1]$.

פתרון: למת שוורץ והנגזרת

סיכום

- טריגונומטריה מהתיכון שימושית לפעמים

סיכום

- טריגונומטריה מהתיכון שימושית לפעמים
- היחס בין סדרות קושי לסדרות רגילות הוא ממש כמו באינפי 1.

סיכום

- טריגונומטריה מהתיכון שימושית לפעמים
- היחס בין סדרות קושי לסדרות רגילות הוא ממש כמו באינפי 1.
- יכולות להיות שתי מטריקות שקולות כאשר האחת שלמה והשניה לא. במילים אחרות "שלמות" אינה תכונה טופולוגית, אלא מטרית.

סיכום

- טריגונומטריה מהתיכון שימושית לפעמים
- היחס בין סדרות קושי לסדרות רגילות הוא ממש כמו באינפי 1.
- יכולות להיות שתי מטריקות שקולות כאשר האחת שלמה והשניה לא. במילים אחרות "שלמות" אינה תכונה טופולוגית, אלא מטרית.
- הטופולוגיה ה-p-אדית הופכת בעיות מתורת המספרים לגאומטריות.

סיכום

- טריגונומטריה מהתיכון שימושית לפעמים
- היחס בין סדרות קושי לסדרות רגילות הוא ממש כמו באינפי 1.
- יכולות להיות שתי מטריקות שקולות כאשר האחת שלמה והשניה לא. במילים אחרות "שלמות" אינה תכונה טופולוגית, אלא מטרית.
- הטופולוגיה ה-p-אדית הופכת בעיות מתורת המספרים לגאומטריות.
- היחס בין סדרות מתכנסות לרציפות הוא כמו היחס בין סדרות קושי לרציפות במ"ש.

סיכום

- טריגונומטריה מהתיכון שימושית לפעמים
- היחס בין סדרות קושי לסדרות רגילות הוא ממש כמו באינפי 1.
- יכולות להיות שתי מטריקות שקולות כאשר האחת שלמה והשניה לא. במילים אחרות "שלמות" אינה תכונה טופולוגית, אלא מטרית.
- הטופולוגיה ה-p-אדית הופכת בעיות מתורת המספרים לגאומטריות.
- היחס בין סדרות מתכנסות לרציפות הוא כמו היחס בין סדרות קושי לרציפות במ"ש.
- מרחבים שלמים שימושיים לפתרון משוואות

סיכום

- טריגונומטריה מהתיכון שימושית לפעמים
- היחס בין סדרות קושי לסדרות רגילות הוא ממש כמו באינפי 1.
- יכולות להיות שתי מטריקות שקולות כאשר האחת שלמה והשניה לא. במילים אחרות "שלמות" אינה תכונה טופולוגית, אלא מטרית.
- הטופולוגיה ה-p-אדית הופכת בעיות מתורת המספרים לגאומטריות.
- היחס בין סדרות מתכנסות לרציפות הוא כמו היחס בין סדרות קושי לרציפות במ"ש.
- מרחבים שלמים שימושיים לפתרון משוואות
- פונקציות מרוכבות מפתיעות כל פעם מחדש