פתרון תרגיל 7 טופולוגיה תשעז

1. הפרכה. נתבונן למשל במרחבים: $X=\mathbb{R}, Y=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. מצד אחד, Y הומיאומורפי לתת-המרחב $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\subseteq X$ (פונקציית ההכלה). כמו כן, X הומיאומורפי לתת-המרחב $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\subseteq Y$ (פונקציית הטנגנס).
מצד שני, X,Y אינם הומיאומורפיים זה לזה; אם נוריד מהמרחב X נקודה כלשהי הוא לא יהיה קשיר, אך במרחב Y קיימות נקודות שאם נוריד אותן המרחב עדיין יישאר קשיר (הקצוות).

2. הפרכה. אם נוריד במרחב $(5,7)\cup\{0\}$ את הנקודה 0 נקבל מרחב קשיר. כל נקודה שנוריד מהמרחב $(1,2)\cup(3,4)$ תיתן מרחב לא קשיר.

3. יהי X מרחב נורמי. יהיו $a\in X,\varepsilon>0$ ונוכיח שמתקיים: $B(0,1)\cong B(a,\varepsilon)$.
ראשית, הפונקציה $f:X\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x)=\|x\|$ היא רציפה.
שנית, נשים לב שפונקציית ההזזה $g:X\to X$ המוגדרת על ידי $g(x)=x+a$ היא רציפה; אכן, עבור $x\in X$,$0<\varepsilon$ נבחר $\delta=\varepsilon$ ואז אם $\|x-y\|<\delta$ נקבל:

$$\|g(x)-g(y)\|=\|x+a-y-a\|=\|x-y\|<\delta=\varepsilon$$

כנדרש ו$g-$ רציפה.
שלישית, נשים לב שלכל c הפונקציה $h:X\to X$ המוגדרת על ידי $h(x)=cx$ היא רציפה; אכן אם $c=0$ הפונקציה קבועה ולכן רציפה. אם $c\neq 0$, עבור $x\in X$,$0<\varepsilon$ נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{|c|}$ ואז אם $\|x-y\|<\delta$ נקבל:

$$\|h(x)-h(y)\|=\|cx-cy\|=|c|\cdot\|x-y\|<|c|\cdot\delta=\varepsilon$$

כנדרש ו$h-$ רציפה.
כעת, נגדיר $F:B(a,\varepsilon)\to B(0,1)$ על ידי: $F(x)=\frac{1}{\varepsilon}(x-a)$. F רציפה כהרכבת רציפות.
כמו כן, $F^{-1}:B(0,1)\to B(a,\varepsilon)$ המוגדרת על ידי: $F^{-1}(x)=\varepsilon x+a$ רציפה כהרכבת רציפות.
לכן בסך הכל F הומיאומורפיזם.

4. ראשית נוכיח שהטענה נכונה כאשר Y קבוצה פתוחה. אם כן, תהי $A\subseteq X$ צפופה בת-מניה. נתבונן בקבוצה $A\cap Y\subseteq Y$.
מצד אחד היא בת-מניה. מצד שני לכל קבוצה $U\subseteq Y$ פתוחה קיימת $V\subseteq X$ פתוחה עבורה $U=V\cap Y$. מכיוון ש$Y-$ פתוחה ב$X-$ נקבל שהקבוצה U פתוחה גם ב$X-$ (חיתוך סופי של פתוחות).
מכיוון שהקבוצה U פתוחה ב$X-$ והקבוצה A צפופה ב$X-$ נקבל: $A\cap Y\cap P=A\cap P\neq\emptyset$ ולכן $A\cap Y$ צפופה ב$Y-$ ולכן Y ספרבילי.

כעת, ניתן דוגמה למצב בו Y אינו קבוצה פתוחה ואינו ספרבילי.
נתבונן למשל בקבוצה $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה τ הבאה: $U \in \tau$ אם ורק אם $0 \in U$ או $U = \emptyset$. כל הקבוצות הסגורות למעט $\mathbb{R}$ עצמה לא מכילות את $\{0\}$. לכן $cl\left(\{0\}\right) = \mathbb{R}$ והמרחב ספרבילי.
אם נתבונן בתת-המרחב $\mathbb{R}\setminus\{0\} \subseteq \mathbb{R}$, נקבל שזהו מרחב דיסקרטי, מכיוון שכל קבוצה $V \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$ אפשר לכתוב: $V = (V \cup \{0\}) \cap (\mathbb{R}\setminus\{0\})$, ומכיוון שהקבוצה $V \cup \{0\}$ פתוחה ב-$\mathbb{R}$ נקבל שהקבוצה V פתוחה ב-$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (לפי הגדרת טופולוגיית תת-מרחב). זהו מרחב דיסקרטי לא בן-מניה ולכן לא ספרבילי.

5. נמצא קבוצה צפופה בת-מניה. נתבונן בקבוצת כל הסדרות שאיבריהן רציונליים והחל ממקום כלשהו כל האיברים שווים ל-0.
הקבוצה בת-מניה (איחוד בן מניה של הקבוצות שאיבריהן רציונליים והחל ממקום מסוים כל האיברים שווים ל-0).
כדי להראות שהקבוצה צפופה, יש להראות שהחיתוך עם כל קבוצה פתוחה הוא לא ריק. מספיק להראות שהחיתוך עם כל כדור פתוח הוא לא ריק (למה?).
כל סדרה $a \in l_1$ היא מתכנסת בהחלט, ולכן האיבר הכללי שלה שואף לאפס. לכן לכל $\varepsilon > 0$ אפשר למצוא סדרה b בקבוצה שלנו עבורה $d\left(a, b\right) < \varepsilon$.

6. נניח בשלילה שהמרחב ספרבילי. לכן קיימת $A \subseteq X$ צפופה בת-מניה, כלומר $cl\left(A\right) = X$. בטופולוגיה שלנו, מכיוון ש-A בת-מניה נקבל שהיא סגורה, ואז $cl\left(A\right) = A$ ונקבל $A = X$ בסתירה לכך שהקבוצה X אינה בת-מניה.

7. תהיי a_n^0 סדרה במרחב. X ח"כ ולכן קיים כיסוי סופי של כדורים עם רדיוס 1 .
מכיוון שהסדרה אינסופית ומספר הכדורים סופי קיים כדור כזה שנמצאים בו אינסוף איברים מתוך הסדרה. נסמן כדור זה $B\left(c_1, 1\right)$.
מכיוון שבכדור יש אינסוף איברים מהסדרה הוא מכיל תת-סדרה שנסמנה a_n^1. נסמן $b_1 = a_1^1$.
שוב, X ח"כ ולכן קיים כיסוי סופי של כדורים עם רדיוס $\frac{1}{2}$. קיים כדור כזה שנסמנו $B\left(c_2, \frac{1}{2}\right)$ המכיל אינסוף איברים מתוך a_n^1 ולכן מכיל תת-סדרה שנסמנה a_n^2, ונסמן $b_2 = a_1^2$.
נמשיך כך עוד ועוד; נקבל סדרה b_n.
הסדרה b_n היא תת-סדרה של a_n^0, ולכל $0 < \varepsilon$ קיים n_0 עבורו $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ ואז לכל $n, m > n_0$ מתקיים: $d\left(b_m, b_n\right) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ (מכיוון שאיברי הסדרה נמצאים בכדורים שהרדיוס שלהם שואף ל-0) והסדרה היא סדרת קושי, כנדרש.

8. יהי X ח"כ ויהי $Y \subseteq X$ תת-מרחב.
לכל $r > 0$ קיימות $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ עבורן $X = \bigcup B\left(x_i, \frac{r}{2}\right)$.
נתבונן בכדורים האלו שעבורם החיתוך $B\left(x_i, \frac{r}{2}\right) \cap Y$ אינו ריק ונבחר $y_i \in B\left(x_i, \frac{r}{2}\right) \cap Y$. נקבל שאוסף הכדורים הזה (עם מרכזים y_i) הוא כיסוי של Y ולכן Y ח"כ.