תרגיל 12 אנליזה הרמונית תש"ף

20 בינואר 2020

1. (תשע"ז מועד א') בעזרת התמרת פורייה, חשבו את האינטגרל:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|} \cos x dx$$

<u>פתרון:</u>
נסמן: $f(x) = x^2 e^{-|x|} \cos x$, ונסמן ב-$F\left[x^2 e^{-|x|} \cos x\right](\omega)$ את ההתמרה של f.
מתקיים:

$$F\left[x^2 e^{-|x|} \cos x\right](\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|} \cos x e^{-i\omega x} dx$$

ולכן:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|} \cos x dx = 2\pi F\left[x^2 e^{-|x|} \cos x\right](0)$$

כמובן שלא נחשב את ההתמרה במפורש, אלא נשתמש בתכונות של ההתמרה.
אנו יודעים שמתקיים:

$$F\left[e^{-|x|}\right](\omega) = \frac{1}{\pi\left(1+\omega^2\right)}$$

לפי תכונת המומנט:

$$F\left[xe^{-|x|}\right](\omega) = i \cdot \frac{d}{d\omega} F\left[e^{-|x|}\right](\omega) = i \cdot \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{\pi\left(1+\omega^2\right)}\right) = \frac{-2i\omega}{\pi\left(1+\omega^2\right)^2}$$

ושוב, לפי המומנט:

$$F\left[x^2e^{-|x|}\right](\omega)=i\cdot\frac{d}{d\omega}F\left[xe^{-|x|}\right](\omega)=i\cdot\frac{d}{d\omega}\left(\frac{-2i\omega}{\pi\left(1+\omega^2\right)^2}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2}\right)$$

נגזור אין ברירה:

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\left(1+\omega^2\right)^2-4\omega^2\left(1+\omega^2\right)}{\left(1+\omega^2\right)^4}=\frac{2-6\omega^2}{\pi\left(1+\omega^2\right)^3}$$

כעת, לפי מודולוציה עם $\cos x$:

$$F\left[x^2e^{-|x|}\cos x\right](\omega)=\frac{1}{2}\left(F\left[x^2e^{-|x|}\right](\omega-1)+F\left[x^2e^{-|x|}\right](\omega+1)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2-6(\omega-1)^2}{\pi\left(1+(\omega-1)^2\right)^3}+\frac{2-6(\omega+1)^2}{\pi\left(1+(\omega+1)^2\right)^3}\right)$$

אי לכך ובהתאם:

$$2\pi F\left[x^2e^{-|x|}\cos x\right](0)=2\pi\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2-6(0-1)^2}{\pi\left(1+(0-1)^2\right)^3}+\frac{2-6(0+1)^2}{\pi\left(1+(0+1)^2\right)^3}\right)=$$

$$=-\frac{4}{8}-\frac{4}{8}=-1$$

כלומר:

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-|x|}\cos x dx=-1$$

2. (תשע"ג מועד ב') נתון כי התמרת פורייה של פונקציה מסוימת $f(x)$ היא: $\hat{f}(\omega)=\frac{1}{1+|\omega|}$. קבעו לגבי כל אחד מהאינטגרלים:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|xf(x)|\,dx,\ \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx$$

האם הוא מתכנס.

פתרון:

לפי פלנשרל:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = 2\pi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+|\omega|)^2} d\omega$$

והאינטגרל הימני מתכנס – "מתנהג כמו" האינטגרל של $\frac{1}{1+\omega^2}$. אם ממש רוצים, אפשר לחלק את האינטגרל לפי תחומי החיוביות/שליליות של הערך המוחלט, לחשב ולראות שמקבלים 2. לכן גם $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx$ מתכנס.

אם $\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)| \, dx$ היה מתכנס, $xf(x)$ הייתה אינטגרבילית בהחלט והיינו יכולים להשתמש בנוסחת המומנט:

$$F[xf(x)](\omega) = i \cdot \frac{d}{d\omega} F[f](\omega)$$

כלומר: $F[xf(x)](\omega) = i\hat{f}'(\omega)$, אבל הפונקציה $\hat{f}$ לא גזירה (ב־$\omega = 0$, בגלל הערך המוחלט) וסתירה. לכן האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)| \, dx$ מתבדר.

3. (תשע"ט מועד ב', בשינויים) נתונה הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\pi}{(1+x)^2} & x \geq 0 \\ -\frac{2\pi}{(1-x)^2} & 0 > x \end{cases}$$

מצאו את $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\omega)|^2 \, d\omega$.

פתרון:

פלנשרל, כמובן:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\omega)|^2 \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = 2\pi \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1-x)^4} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^4} dx \right) =$$

$$2\pi \left(\left. \frac{-(1-x)^{-3}}{-3} \right|_{-\infty}^{0} + \left. \frac{(1+x)^{-3}}{-3} \right|_{0}^{\infty} \right) = 2\pi \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{4\pi}{3}$$

בהנחה שלא טעיתי.

נוסחת המומנט: תרגול 9 של הטכניון, 3.8 בעמוד 107 בספר.
נוסחת המודולוציה: תרגול 9 של הטכניון, 3.6 בעמוד 106 בספר.
נוסחת פלנשרל: תרגול 10 של הטכניון, עמוד 114 בספר.