פתרון לתרגיל 1 באינפי 3

1. ראשית נוכיח את אי השוויון הימני

(א)

$$(\sum_{i=1}^{n}|x_i|)^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i||x_j|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2+2\sum_{1\le i<j\le n}|x_i||x_j|\ge\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2$$

לכן,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2}\le\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

שזה בדיוק אי השוויון הימני.

(ב) בשביל להוכיח את אי השוויון השמאלי נגדיר

$$x=(|x_1|,\dots,|x_n|),\quad y=(1,\dots,1)$$

לפי אי שוויון קושי שורץ

$$|x\cdot y|\le||x||||y||$$

נשים לב ש

$$|x\cdot y|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

$$||x||=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2}$$

$$||y||=\sqrt{n}$$

ולכן מתקבל

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sqrt{n}}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2}$$

.2

(א) ראשית נשים לב כי מאחר ו $d(x,y)\ge 0$ מתקיים גם כי $\min\{1,d(x,y)\}\ge 0$ ולכן $\alpha(x,y)$ היא פונקציה חיובית. כעת נבדוק את שאר התכונות:

i. קל לראות שהמרחק בין x ל y הוא 0 אם ורק אם הם שווים.

$$\alpha(x,y)=0 \Leftrightarrow \min\{1,d(x,y)\}=0 \Leftrightarrow d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$$

ii. סימטריות: היות ו $d(x,y)=d(y,x)$ ברור ש

$$\alpha(x,y)=\min\{1,d(x,y)\}=\min\{1,d(y,x)\}=\alpha(y,x)$$

iii. אי שוויון המשולש: צריך להוכיח ש

$$\alpha(x,y)=\min\{1,d(x,y)\} \leq \min\{1,d(x,z)\}+\min\{1,d(z,y)\}=\alpha(x,z)+\alpha(z,y)$$

נחלק את ההוכחה למקרים

א'. נניח ש $1 \leq d(x,y)$ (כלומר $\alpha(x,y)=1$) ו $1 \leq d(x,z)$ או $1 \leq d(z,y)$. נקבל ש $\alpha(x,z)=1$ או $\alpha(z,y)=1$, ולכן בכל מקרה

$$\alpha(x,y)=1 \leq \alpha(x,y)+\alpha(y,z)$$

ב'. נניח ש $1 \leq d(x,y)$ (כלומר $\alpha(x,y)=1$), אבל $d(x,z)<1$ וגם $d(z,y)<1$ אז

$$\alpha(x,y)=1 \leq d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)=\alpha(x,z)+\alpha(z,y)$$

ג'. נניח ש $d(x,y)<1$ (כלומר $\alpha(x,y)=d(x,y)$) ו $1 \leq d(x,z)$ או $1 \leq d(z,y)$. נקבל ש $\alpha(x,y)=1$ או $\alpha(y,z)=1$ ולכן בכל מקרה

$$\alpha(x,y)=d(x,y)<1 \leq \alpha(x,y)+\alpha(y,z)$$

ד'. נניח ש $d(x,y)<1$ (כלומר $\alpha(x,y)=d(x,y)$), אבל $d(z,y)<1$ וגם $d(x,z)<1$. אז

$$\alpha(x,y)=d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)=\alpha(x,z)+\alpha(z,y)$$

לכן בכל מקרה אי שוויון המשולש מתקיים.

(ב) ראשית נשים לב ש $d(x,y)\geq 0 \Leftarrow 1+d(x,y)>0$ ולכן $\beta(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ גם מוגדרת היטב וגם חיובית. כעת נוכיח את התכונות:

i. שווה 0 רק על איברים שווים:

$$\beta(x,y)=0 \Leftrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=0 \Leftrightarrow d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$$

ii. סימטריות: היות ו $d(x,y)=d(y,x)$ ברור ש

$$\beta(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=\frac{d(y,x)}{1+d(y,x)}=\beta(y,x)$$

iii. אי שוויון המשולש: צריך להוכיח

$$\beta(x,y)\leq\beta(x,z)+\beta(z,y)$$

כלומר

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\leq\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}+\frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}$$

אם נעבוד קצת נקבל

$$d(x,y)(1+d(x,z))(1+d(z,y))\leq d(x,z)(1+d(x,y))(1+d(z,y))+d(z,y)(1+d(x,y))(1+d(x,z))$$

$$\begin{aligned}d(x,y)(1+d(x,z)+d(z,y)+d(x,z)d(z,y))\leq\\ d(x,z)(1+d(x,y)+d(z,y)+d(x,y)d(z,y))\\ +d(z,y)(1+d(x,y)+d(x,z)+d(x,y)d(x,z))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(x,y)+d(x,y)d(x,z)+d(x,y)d(z,y)+d(x,y)d(x,z)d(z,y)\leq\\ d(x,z)+d(x,z)d(x,y)+d(x,z)d(z,y)+d(x,z)d(x,y)d(z,y)\\ +d(z,y)+d(z,y)d(x,y)+d(z,y)d(x,z)+d(z,y)d(x,y)d(x,z)\end{aligned}$$

וכאן כבר אפשר לצמצם כמה דברים ולקבל

$$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)+2d(z,y)d(x,z)+d(x,z)d(x,y)d(z,y)$$

שזה כמובן נכון כי

$$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$$

לכן אי שוויון המשולש מתקיים.

3. נזכור כי $x\in\operatorname{Lim}A$ אם לכל $r>0$ קיים $x\neq a\in A$ כך ש $a\in B(x,r)$.

(א) הפרכה: נניח

$$A=\{(\frac{1}{n},0)\mid n\in\mathbb{N}\},\quad B=\{(-\frac{1}{n},0)\mid n\in\mathbb{N}\}$$

אז

$$\operatorname{Lim}A=\operatorname{Lim}B=\{(0,0)\}$$

אבל

$$\operatorname{Lim}(A\cap B)=\operatorname{Lim}\emptyset=\emptyset$$

(ב) הוכחה: נניח ש $x \in \operatorname{Lim}(A\cap B)$ ונוכיח כי $x \in \operatorname{Lim} A$ (בדומה מוכיחים $x \in \operatorname{Lim} B$). יהי $0 < r$, קיים $x \neq a \in A\cap B \subseteq A$ כך ש $a \in B(x,r)$ ולכן ברור ש $x \in \operatorname{Lim} A$.

(ג) הוכחה:

i. צד $\subseteq$: נניח ש $x \in \operatorname{Lim} A \cup \operatorname{Lim} B$, בלי הגבלת כלליות $x \in \operatorname{Lim} A$. לכל $0 < r$ קיים $x \neq a \in A \subseteq A\cup B$ כך ש $a \in B(x,r)$. לכן $x \in \operatorname{Lim}(A\cup B)$.

ii. צד $\supseteq$: נניח ש $x \in \operatorname{Lim}(A\cup B)$. נניח בשלילה כי $x \notin \operatorname{Lim} B$ ו $x \notin \operatorname{Lim} A$. היות ו $x \notin \operatorname{Lim} B$, קיים $r_B > 0$, כך שלכל $x \neq a \in B$ מתקיים כי $a \notin B(x,r_B)$. באופן דומה קיים $r_A > 0$, כך שלכל $x \neq a \in A$ מתקיים כי $a \notin B(x,r_A)$. ניקח $r = \min\{r_A, r_B\}$. היות ו $x \in \operatorname{Lim}(A\cup B)$, קיים $x \neq a \in A\cup B$ כך ש $a \in B(x,r)$. בלי הגבלת כלליות נניח כי $a \in A$. אז $a \in B(x,r) \subseteq B(x,r_A)$ בסתירה לכך ש $a \notin B(x,r_A)$.

(ד) הפרכה: נבחר $A_{\text{n}} = (\frac{1}{n},0)$ אז $\operatorname{Lim}\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0,0)$ אבל $\operatorname{Lim} A_n = \emptyset$ ולכן,

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Lim} A_n = \emptyset$.

4. נראה כי $(\operatorname{Lim} A)^c$ היא קבוצה פתוחה. נניח $x \in (\operatorname{Lim} A)^c$, נראה כי x נקודה פנימית. היות ו x אינה נקודת גבול של A, קיים $r > 0$ כך ש $B(x,r)\backslash\{x\}$ אינו מכיל נקודות מ A. נראה כי $B(x,r) \subseteq (\operatorname{Lim} A)^c$ ולכן x היא נקודה פנימית. נניח בשלילה כי קיים $l \in \operatorname{Lim} A \cap B(x,r)$. נשים לב ש $x \neq l$ כי x היא לא נקודת גבול. בגלל ש $B(x,r)$ קבוצה פתוחה, קיים $r' > 0$ כך ש $B(l,r') \subseteq B(x,r)$. נבחר $0 < r'' < \min\{r', ||l-x||\}$ (קיים r'' כנ"ל כי $l \neq x$). לכן $x \notin B(l,r'') \subseteq B(x,r)$. בגלל ש l נקודת גבול, קיים $a \in A$ כך ש $a \in B(l,r'') \subseteq B(x,r)$. לכן $a \in B(x,r)$ ו $x \neq a$ (כי $x \notin B(x,r'')$). זאת בסתירה להגדרת r ($B(x,r)\backslash\{x\}$ אינו מכיל נקודות מ A).

5.

(א) א$\Leftarrow$ג: נבחר $M = 2r$. אם $x,y \in A$ אז בגלל ש $x,y \in B(x_0,r)$ נקבל כי

$$d(x,y) \leq d(x,x_0) + d(x_0,y) < r + r = 2r = M$$

שזה מה שדרוש.

(ב) ג $\Leftarrow$ב: יהי $x_0 \in X$ כלשהוא נבחר $a \in A$ כלשהוא ונגדיר $d(a,x_0) = d$ ו $r = d + M$. כעת, לכל $x \in A$ מתקיים

$$d(x,x_0) \leq d(x,a) + d(a,x_0) \leq M + d = r$$

לכן $x \in B(x_0,r)$ כנדרש.

(ג) ב $\Leftarrow$א: מיידי. אם הטענה נכונה לכל $x_0 \in X$ אזי קיים $x_0 \in X$ עבורו הטענה נכונה.

.6

(א)

i. הקבוצה אינה פתוחה. הוכחה: לכל $r>0$ בכדור $B((0,0),r)$ נמצאת הנקודה $(0,\frac{r}{2})$ שאינה בקבוצה. לכן $(0,0)$ אינה נקודה פנימית.

ii. הקבוצה סגורה: הוכחה: נראה שמשלימתה פתוחה. תהי (x,y) נקודה שאינה בקבוצה, אם $y\neq 0$. נבחר $r=\frac{|y|}{2}$ ואז הכדור $B((x,y),r)$ אינו מכיל אף נקודה מציר x ובפרט אף נקודה מהקבוצה A. אם $y=0$ נבחר $r=\frac{1}{2}\min\{|x-1|,|x|\}$ ואז שוב $(0,0),(1,0)\notin B((x,y),r)$. לכן בכל מקרה (x,y) היא נקודה פנימית ל A^c.

iii. נקודות גבול: בגלל שהקבוצה סגורה, נקודות הגבול חייבות להיות מוכלות בה, לכן האפשרויות היחידות הן $(0,0),(1,0)$. אבל אם $r=\frac{1}{2}$, אין אף נקודה ב A בכדור $B((0,0),r)$ (פרט ל $(0,0)$ עצמה) - לכן $(0,0)$ אינה נקודת גבול. בדומה אין אף נקודה ב A בכדור $B((1,0),r)$ (פרט ל $(1,0)$ עצמה) - לכן $(1,0)$ אינה נקודת גבול. לסיכום: ל A אין נקודות גבול.

(ב)

i. הקבוצה אינה פתוחה. הוכחה: נראה כי $(0,1)$ אינה נקודה פנימית. לכל $r>0$, הכדור $B((0,1),r)$ מכיל את הנקודה $(0,1+\frac{r}{2})$ שאינה נמצאת בקבוצה A. לכן $(0,1)$ אינה נקודה פנימית ולכן A אינה פתוחה.

ii. הקבוצה אינה סגורה. הוכחה: נראה כי משלימתה לא פתוחה. נשים לב ש $(1,0)$ נמצאת ב A^c. לכל $r>0$, הכדור $B((1,0),r)$ מכיל את הנקודה $(1-\frac{r}{2},0)$ שאינה נמצאת ב A^c, לכן $(1,0)$ אינה נקודה פנימית של A^c. לכן A^c אינה פתוחה ולכן A אינה סגורה.

iii. נקודות גבול: בגלל שהקבוצה $\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}=B((0,0),1)\subseteq A$ היא כדור פתוח, כל נקודה שלה היא נקודה פנימית ולכן היא גם נקודת הצטברות. נקודות בקבוצה $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ הן גם נקודות גבול, כי לכל $r>0$, נוכל לבחור $r'=\min\{r,1\}$ ואז הנקודה $((1-\frac{r'}{2})x,(1-\frac{r'}{2})y)$ נמצאת ב $B((x,y),r)\cap A$ ולכן אלה גם נקודות גבול. הנקודות בקבוצה $\{(x,y)\mid x^2+y^2>1\}$ הן כולן נקודות פנימית של הקבוצה הזאת ולכן קיים כדור $B((x,y),r)$ שמוכל כולו ב $\{(x,y)\mid x^2+y^2>1\}$ ולכן זר ל A. לכן נקודות אלה הן לא נקודות גבול. לסיכום: נקודות הגבול הן $\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}=\overline{B}((0,0),1)$.

(ג)

i. הקבוצה פתוחה. הוכחה: לכל, $(x,y)\in A$. נבחר $r=\frac{1}{2}\min\{|x|,|y|\}$. ואז $B((x,y),r)\subseteq A$, מפני שאם $(a,b)\in B((x,y),r)$ אז

$$|a-x|<\sqrt{|a-x|^2+|b-y|^2}<r\le\frac{1}{2}|x|$$

ולכן

$$a>x-\frac{1}{2}|x|=|x|-\frac{1}{2}|x|=\frac{1}{2}|x|>0$$

. באופן דומה $|b-y| < \frac{1}{2}|y|$ ולכן

$$b < y + \frac{1}{2}|y| = -|y| + \frac{1}{2}|y| = -\frac{1}{2}|y| < 0$$

לכן $(a,b) \in A$.

ii. הקבוצה אינה סגורה. הוכחה: המשלים מכיל את $(0,0)$ ולכל $r > 0$ הכדור $B((0,0),r)$ מכיל את הנקודה $(\frac{r}{2}, -\frac{r}{2})$ שאינה נמצאת ב A^c. לכן $(0,0)$אינה נקודה פנימית של A^c ולכן A אינה קבוצה סגורה.

iii. כמו בסעיף הקודם, כל נקודה פנימית היא נקודת גבול וכל נקודה חיצונית (נקודה פנימית של A^c) היא לא נקודת גבול. שאר הנקודות (אלה שהן לא פנימיות ולא חיצוניות) הן הנקודות

$$\{(x,y) \mid x=0,\, y \le 0\} \cup \{(x,y) \mid x \ge 0, \quad y=0\}$$

נקודות אלה הן נקודות גבול כי לכל $r > 0$ נוכל לבחור את הנקודה $(x+\frac{r}{2}, y-\frac{r}{2})$ שנמצאת ב $B((x,y),r) \cap A$. לסיכום: נקודות הגבול הן $\{(x,y) \mid x \ge 0, \quad y \le 0\}$.

.7

(א)

i. הקבוצה אינה פתוחה. הוכחה: נבחר למשל את $(\frac{1}{2}, 0)$. לכל $r > 0$, הנקודה $(\frac{1}{2}, \frac{r}{2})$ נמצאת ב $B((\frac{1}{2},0),r)$ אבל לא נמצאת ב A, לכן $(\frac{1}{2},0)$ אינה נקודה פנימית ו A אינה פתוחה.

ii. הקבוצה אינה סגורה. הוכחה: נראה כי A^c אינה פתוחה, כי $(0,0)$ אינה נקודה פנימית שלה. ובאמת, לכל $r > 0$ נוכל לבחור $r' = \min\{r,1\}$ ואז הנקודה $(0, \frac{r'}{2})$ נמצאת ב $B((0,0),r)$ אבל לא נמצאת ב A^c. לכן A היא לא קבוצה סגורה.

(ב)

i. הקבוצה פתוחה. הוכחה: לכל $x \in (0,1)$ נבחר $r = \frac{1}{2}\min\{x, 1-x\}$ ואז לכל $y \in B(x,r)$ מתקיים

$$|y-x| < r$$

ולכן

$$y < x + r < x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x < 1$$

ו

$$y > x - r > x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x > 0$$

ולכן $B(x,r) \subseteq (0,1)$. לכן A פתוחה.

ii. הקבוצה אינה סגורה. הוכחה: נראה כי A^c אינה פתוחה. נביט על $0 \in A^c$. לכל $r > 0$, נבחר $r' = \min\{r,1\}$ ואז $\frac{r'}{2} \in B(0,r) \cap A$ ולכן 0 אינה נקודה פנימית של A^c ולכן A אינה סגורה.