

אינפי 3 תרגיל 5 לתיכונים

1. נגדיר פונקציה

$$f(x, y, z) = xy^2z^3$$

מצאו את הנגזרת הכיוונית של f בנקודה $(3, 2, 1)$ בכיוון $h = (h_1, h_2, h_3)$ שימו לב ש h לא בהכרח וקטור יחידה.

2. תהי $f(x, y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$ ומקיימת כי

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t) - f(t, -t)}{t} = 1$$

מצא את $f'_y(0, 0)$.

3. תהינה $f(x, y)$ ו $g(x, y)$ שתי פונקציות דיפרנציאביליות בנקודה $(0, 0)$. נגדיר

$$h(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & xy > 0 \\ g(x, y) & xy \leq 0 \end{cases}$$

הוכיחו כי $h(x, y)$ דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$ אם ורק אם מתקיים כי

$$g(0, 0) = f(0, 0), \quad g'_x(0, 0) = f'_x(0, 0), \quad g'_y(0, 0) = f'_y(0, 0)$$

(רמזים: בכיוון אחד מומלץ להשתמש בנגזרות כיווניות, בכיוון השני כדאי להתחיל מהמקרה שבו $g(x, y) = 0$)

4. משטח נתון על ידי המשוואה $z = e^{-x^2-2y^2}$

(א) מצאו $P = (x_0, y_0, z_0)$ נקודה על המשטח, כך שאם יניחו עליה כדור, הוא יתחיל לנוע בכיוון $(2, 1, a)$ עבור a כלשהוא. מצאו גם את a .

(ב) מצאו נקודה על המשטח שאם יניחו עליה את הכדור הוא לא יזוז לשום מקום.

5. הוכח כי הפונקציות

$$f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}, \quad f(x, y) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

מקיימות את המשוואה

$$f''_{xx} + f''_{yy} = 0$$

6. נתונה פונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

מצא את $f''_{yx}(0, 0)$ ואת $f''_{xy}(0, 0)$.

7. תהי פונקציה גזירה ברציפות פעמיים בתחום $D = (0, \infty) \times (0, \infty)$. ונניח ש x, y מבוטאים באמצעות s, t לפי $x = e^{s+t}$, $y = e^{s-t}$ כך שניתן להגדיר הרכבה

$$g(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$$

הוכח כי

$$g_{st} = 0 \Leftrightarrow x^2 f_{xx} + x u_x = y^2 f_{yy} + y f_y$$