לינארית 1 (88112), סמטסטר חורף תשעח,מועד ב'-פתרון

חלק א

1. יהא V מ"ו נוצר סופית ו $T,S:V\to V$ ה"ל. נסמן ב I את העתקת הזהות.

(א) הוכיחו/הפריכו: אם לכל $v\in V$ מתקיים $Tv=v+Sv$ אז T הפיכה.
פתרון: הפרכה: נגדיר $Sv=-v$ ו $T=0$ ואז אכן מתקיים

$$Tv=0=v-v=v+Sv$$

אבל T אינה הפיכה.

(ב) הוכיחו/הפריכו: אם $T\circ S=S$ וגם S הפיכה אז T הפיכה.
פתרון: הוכחה: אם S הפיכה, נוכל להרכיב את S^{-1} מימין על השיוויון

$$T\circ S=S$$

שמניחים ולקבל

$$T=I$$

ובפרט T הפיכה.

(ג) אם $\ker T=\mathrm{Im}S$ אזי $S\circ T\neq T\circ S$
פתרון: הפרכה: נבחר $V=\mathbb{R}^2$ ונגדיר $T=S$ להיות העתקה בכפל במטריצה

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

אזי

$$\ker T=N(A)=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

וגם

$$\mathrm{Im}S=C(A)=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן $\ker T=\mathrm{Im}S$. אבל $S\circ T=T\circ S$ כי $S=T$.

(ד) הוכיחו: אם $\ker S\subseteq\ker T$ וגם $\mathrm{Im}S\subseteq\mathrm{Im}T$ אז $\mathrm{Im}S=\mathrm{Im}T$.
פתרון: הוכחה: לפי משפט הדרגה נקבל

$$\dim V=\dim\ker T+\dim\mathrm{Im}T$$

וגם

$$\dim V=\dim\ker S+\dim\mathrm{Im}S$$

ולכן

$$\dim\ker S+\dim\mathrm{Im}S=\dim\ker T+\dim\mathrm{Im}T$$

כעת, מההנחה $\ker S\subseteq\ker T$ וגם $\mathrm{Im}S\subseteq\mathrm{Im}T$ נקבל ש $\dim\ker S\leq\dim\ker T$ וגם $\dim\mathrm{Im}S\leq\dim\mathrm{Im}T$ ולכן

$$\dim\ker T+\dim\mathrm{Im}T\leq\dim\ker S+\dim\mathrm{Im}S=\dim\ker T+\dim\mathrm{Im}T$$

ולכן מתקיים שיוויון $\dim\ker S = \dim\ker T$ וגם $\dim \text{Im}S = \dim \text{Im}T$ (אחרת נקבל

$$\dim\ker T + \dim \text{Im}T < \dim\ker S + \dim \text{Im}S = \dim\ker T + \dim \text{Im}T$$

סתירה). קיבלנו ש $\dim \text{Im}T \leq \dim \text{Im}S$ ומתקיימת הכלה $\text{Im}T \subseteq \text{Im}S$ ולכן יש שיוויון $\text{Im}S = \text{Im}T$.

2. תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ריבועיות כך ש $N(A) = N(B)$ וגם $AB = B$. הוכיחו/הפריכו: $C(A) = C(B)$.
פתרון: הוכחה: לפי משפט הדרגה נקבל

$$n = \dim N(A) + \dim C(A)$$

וגם

$$n = \dim N(B) + \dim C(B)$$

ולכן

$$\dim N(B) + \dim C(B) = \dim N(A) + \dim C(A)$$

ומההנחה $N(A) = N(B)$ נקבל $\dim N(A) = \dim N(B)$ ולכן

$$\dim C(B) = \dim C(A)$$

בנוסף, מההנחה ש $AB = B$ נקבל ש $C(B) = C(AB) \subseteq C(A)$. קיבלנו הכלה, $C(B) \subseteq C(A)$ ושיוויון מימדים $\dim C(B) = \dim C(A)$ ולכן $C(B) = C(A)$.

חלק ב

3. יהא $B = \left\{1, 1+x, 1-x^2\right\}$ בסיס ל $V = \mathbb{R}_2[x]$. תהא $T : V \to V$ המקיימת

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} a & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(א) לאילו ערכי a ההעתקה T הפיכה?
פתרון: כולם מוזמנים לכתוב פתרון מסודר ולעלות לאתר. נסתפק פה בלהגיד שניתן למצוא את התשובה בקלות ע"י חישוב הדטרמיננטה:

$$\left|[T]_B^B\right| = \left|\begin{pmatrix} a & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = (1-a)\left[1+a^2\right]$$

כעת, T הפיכה אמ"מ $[T]_B^B$ הפיכה אמ"מ $\left|[T]_B^B\right| \neq 0$ אמ"מ $a \neq 1$.

(ב) עבור $a = 1$, מצאו $\ker T$.
פתרון: כולם מוזמנים לכתוב פתרון מסודר ולעלות לאתר. נסתפק פה בלהגיד שניתן למצוא את התשובה בקלות ע"י המשפט:

$$[\ker T]_B = N([T]_B^B)$$

(ג) עבור $a = -1$ מצאו מפורשות את T^{-1}.
פתרון: כולם מוזמנים לכתוב פתרון מסודר ולעלות לאתר. נסתפק פה בלהגיד שניתן למצוא את התשובה בקלות ע"י המשפט:

$$[T^{-1}]_B^B = \left([T]_B^B\right)^{-1}$$

ואז מקבלים מטריצה מייצגת של T^{-1} עם בסיסים נתונים. ומפה הדרך לפתרון קצרה.

4. נגדיר שתי מטריצות ממשיות

$$B = \begin{pmatrix} a & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & a^2+a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 \\ a^3+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(א) עבור $a=-1$ מצאו מטריצה $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ כך ש $AB=C$.

פתרון: כולם מוזמנים לכתוב פתרון מסודר ולעלות לאתר. נסתפק פה בלהגיד שניתן למצוא את התשובה בקלות ע"י חישוב הדטרמיננטה:

$$\left|\begin{pmatrix} a & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = (1-a)\left[1+a^2\right]$$

ונקבל שהמטריצה B הפיכה לכל $a\neq1$. לכן במקרה ש $a=-1$ המטריצה B הפיכה ונוכל להגדיר

$$A=CB^{-1}$$

ואז יתקיים

$$AB=CB^{-1}B=C$$

כנדרש.

(ב) עבור אילו ערכי a קיימת מטריצה $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ כך ש $AB=C$.

פתרון: כולם מוזמנים לכתוב פתרון מסודר ולעלות לאתר. נסתפק פה בלהגיד שניתן למצוא את התשובה בקלות ע"י חישוב הדטרמיננטה:

$$\left|\begin{pmatrix} a & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = (1-a)\left[1+a^2\right]$$

ונקבל שהמטריצה B הפיכה לכל $a\neq1$. לכן לכל $a\neq-1$ נוכל להגדיר

$$A=CB^{-1}$$

ואז יתקיים

$$AB=CB^{-1}B=C$$

כנדרש. עבור $a=-1$ מתקיים ש B אינה הפיכה אבל C כן כי

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & a^2+a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 \\ a^3+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = \left(a^3+1\right)\left(a^2+a\right)-2$$

(מוזמנים לעשות את החישוב המלא) ולכן עבור $a=-1$ נקבל ש $|C|=-2$ ולכן C הפיכה. מכאן שלא קיימת A כנדרש כי כפל של כל מטריצה A במטריצה הלא הפיכה B לא יכול להיות שווה למטריצה ההפיכה C(כי אם כפל מטריצות הפיך אז גם כל אחת מהמטריצות הפיכה).

5. נסמן $V=\mathbb{R}^4$ ונגדיר

$$U=\left\{\begin{pmatrix} a+b \\ b-c \\ 2a+b+c \\ a+c \end{pmatrix} \mid a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

$$W=\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\in V \mid \begin{pmatrix} a \\ c \\ b+d \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c \\ a-b \\ d \\ a+b-c \end{pmatrix}\right\}$$

(א) הוכיחו ש W,U ת"מ של V.

פתרון: לפי הגדרה מתקיים כי:

$$U=\left\{\begin{pmatrix} a+b \\ b-c \\ 2a+b+c \\ a+c \end{pmatrix} \mid a,b,c\in\mathbb{R}\right\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ולכן הוא ת"מ (כל spanהוא ת"מ). בנוסף ˙

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\in V\mid\begin{pmatrix}a\\c\\b+d\\a+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+c\\a-b\\d\\a+b-c\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\in V\mid\begin{cases}a-b-c&=0\\a-2b&=0\\-c+d&=0\\a+b-c-d&=0\end{cases}\right\}$$

ולכן גם W ת"מ כי הוא אוסף כל הפתרונות למערכת הומגונית.

(ב) מצאו בסיסים ומימדים ל 4 המרחבים $U,W,U\cap W,U+W$.

פתרון: כולם מוזמנים לכתוב פתרון מסודר ולעלות לאתר. מהצגת spanומשוואות ניתן להמשיך את הפתרון עם אלגוריתמיקה ידועה ומוכרת. ˙