תאריך הבחינה: 24.01.10
שם המרצה: ברברמן, גולדשטיין, גולקו, פייניוק
שם הקורס: חדו"א א לחשמל וכו'
מס' הקורס: 9811
מיועד לתלמידי: חשמל וכו'
שנה: א סמסטר: א מועד א
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: מחשבון רגיל, דף A4 (שני צדדים)

אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

מס' נבחן: ____________________

ענה על 5 שאלות. רשום בראש המחברת את מספרי השאלות שענית עליהן (רק אלה יבדקו).
כתוב תשובות ברורות ומנומקות היטב. בהצלחה!

מועד א

1. א) נתונה סדרה $\{x_n\}$ כך ש $\limsup_{n\to\infty}|x_n| = 0$. הוכח שהסדרה מתכנסת ל- 0. (10 נקודות)

ב) חשב: $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(2+3^n)}{2n}$. (10 נקודות)

2. חשב: א) $\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}$. ב) $\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$. (כל חלק 10 נקודות)

3. א) נתונה פונקציה f המוגדרת וגזירה על $(1, \infty)$ כך שלכל x בקטע, $|f'(x)| < \frac{\ln x}{x^2}$. הוכח ש: $[f(2x)-f(x)]\to 0$ כאשר $x\to\infty$. (15 נקודות)

$\lim_{x\to\infty} f(2x)-f(x)=0$

ב) חשב את הנגזרת של $f(x) = (x+tgx)^{(\cos x)^2}$. (5 נקודות)

4. חקור את הפונקציה $y = \frac{x}{\sqrt{|x^2-1|}}$. (20 נקודות)

5. חשב: א) $\int(1+\sin x)\cos x\ln(\sin x)\,dx$, ב) $\int\frac{(1-x^3)dx}{x(x^2+1)}$. (כל חלק 10 נקודות)

6. א) מצא פונקציה גזירה f שאינה זהותית אפס ושמקיימת:
$[f(x)]^2 = \int_0^x\frac{f(t)\sin t\,dt}{2+\cos t}$. (10 נקודות)

ב) חשב את השטח של התחום שבין העקומות $y^2 = x+1$ ו- $y = x-1$. (10 נקודות)

אבקש לבדוק שאלות

1, 2, 3, 5, 6

במידה וכל המבחן נבדק שאלה 4 מופיעה
בסוף המחברת

(2.א) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$ Lhopital $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{\cos^2x}-\cos x}{3x^2}=\frac{0}{0}$ Lhop $\Rightarrow$

(+)

עפ' גבולות מפורסמים

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2\sin x}{\cos^3x}+\sin x}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{\overset{1}{\sin x}\left(\frac{2}{\cos^3x}+1\right)}{x\cdot6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

(2.ב) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$ Lhopital (=>)

$f(x)=(\cos x)^{\sin(x)}\qquad [\ln f(x)]'=[\sin(x)\ln(\cos(x))]'$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\cos(x)\ln\cos(x)+\sin x\left(\dfrac{-\sin x}{\cos x}\right)$

$f'(x)=\left(\cos(x)\ln(\cos(x))-\dfrac{\sin^2x}{\cos x}\right)\cos(x)^{\sin(x)}\Big\}\Leftarrow$

(*) לנגזרת הכי אידאלי $f'(x)$

$$\frac{\cos(x)^{\sin(x)}\left(\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}-\cos(x)\ln(\cos(x))\right)}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\text{ Lhopital }=$$

$$\frac{f'(x)^2+\cos(x)^{\sin(x)}\left(\sin x\ln(\cos x)+\cos(x)\left(\frac{+\sin x}{\cos x}\right)-\frac{1}{\cos^2x}\cdot\sin x-\ldots\right)}{6x}$$

$\ln\cos x=\frac{-\sin}{\cos x}$

$6x$

$\sin x\, tgx=\dfrac{\sin x}{\cos^2x}+\dfrac{\cos x}{\cos}\sin$

(2.ב) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos(x))^{\sin(x)}}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] \text{ Lhopital } \Rightarrow$$

$1^0 = 1$

(*) $\ln f(x) = \sin(x)\ln\cos(x)$

$$f'(x) = \Big(\overbrace{\cos(x)\ln(\cos(x)) + \sin(x)\frac{\sin(x)}{\cos x}}^{A}\Big)\cos x^{\sin x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-\left(\cos(x)\ln(\cos(x)) + \frac{\sin^2(x)}{\cos x}\right)\cos(x)^{\sin(x)}}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \text{ Lhopital}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\Big(\cos(x)^{\sin(x)}\Big(\overbrace{-\sin(x)\ln(\cos(x)) + \cancel{\cos(x)}\frac{-\sin x}{\cancel{\cos x}} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}}^{B} - \sin x\Big) + f'(x)\Big)}{6x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\Big(\cos(x)^{\sin(x)}\sin(x)\Big(-\ln(\cos(x)) - 2 - \frac{1}{\cos^2(x)}\Big) + f'(x)\cdot B\Big)}{6x} = \frac{0}{0} \text{ Lhop}$$

ביטויים ונגזרות שמתאפסים

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\Big(\overbrace{\cos(x)^{\sin(x)+1}}^{\to 1}\Big(-\ln(\overbrace{\cos(x)}^{\to 0}) - 2 - \overbrace{\frac{1}{\cos^2(x)}}^{1}\Big) + \cdots\Big)}{6} = +\frac{1}{2}$$

+

5.א $\int (1+\sin x)\cos x \ln(\sin(x))\,dx \stackrel{(1)}{=}$

$\sin x = t \qquad dt = \cos x\,dx$

$\stackrel{(1)}{=} \int (1+t)\ln(t)dt = \int \ln(t)dt + \int t\ln(t)\,dt$

$\begin{cases} u=\ln(t) & v=t \\ du=\frac{1}{t} & dv=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u=\ln(t) & v=\frac{t^2}{2} \\ du=\frac{1}{t} & dv=t \end{cases}$

20/20

$= t\ln(t) - \int dt + \frac{t^2}{2}\ln(t) - \frac{1}{2}\int t\,dt =$

$= t\ln(t) - t + \frac{t^2}{2}\ln(t) - \frac{1}{2}t^2\cdot\frac{1}{2} + C =$ 10/10

$= \left[\sin x\ln(\sin x) - \sin(x) + \frac{\sin^2 x}{2}\ln(\sin x) - \frac{1}{4}\sin^2 x + C\right]$

5.ב $\int \frac{(1-x^3)\,dx}{x(x^2+1)} = \int -1 + \frac{x+1}{x(x^2+1)}dx = -x + \int \frac{x+1}{x(x^2+1)}dx \Rightarrow$

$\begin{array}{r|l} -x^3+1 & x^3+x \\ \hline -x^3-x & -1 \\ \hline x+1 & \end{array}$

$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{x+1}{x(x^2+1)}$

$A(x^2+1) + Bx^2 + Cx = x+1$

(1) $x=0$ $\quad A=1$

(2) $x=1$ $\quad 2+B+C=2 \quad B=-C$ $\quad C=1$

(3) $x=-1$ $\quad 2+B-C=0 \quad 2B=-2$ $\quad B=-1$

$\Rightarrow -x + \int\frac{dx}{x} - \int\frac{(x-1)dx}{x^2+1} = -x + \ln|x| - \underbrace{\int\frac{x\,dx}{x^2+1}}_{A} + \underbrace{\int\frac{dx}{x^2+1}}_{B}$

$A: = -\int\frac{x}{x^2+1}dx = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| = -\frac{1}{2}\ln|x^2+1|$

$x^2+1=t \qquad dt=2x\,dx$

$B: = \int\frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x.$

10/10

$\Rightarrow \left[-x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \operatorname{arctg} x + C\right]$

1 א

נתונה סדרה $\{x_n\}$ כך ש: $\overline{\lim_{n\to\infty}} |x_n| = 0$

צ"ל $\{x_n\}$ מתכנסת לאפס.

למה ?

(מהעיקרון המורחב => $\overline{\lim_{n\to\infty}} -x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 0 = -\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} -x_n$

~~אם x_n מתכנסת אז~~

נזכור כי $-\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$,

לכן ⇐ $0 = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$

⇐ שני הגבולות (העליון והתחתון) של הסדרה שואפים

לאותו ערך ⇐ $\{x_n\}$ מתכנסת!

מש"ל

04/10

1.ב $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2+3^n)}{2n} = \frac{\infty}{\infty}$ Lhopital =

$\ln f(n) = n\ln(3)$ $\quad f'(n) = \ln(3) f(n)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3)3^n}{\ln(2)2n(2+3^n)}$ $\frac{\infty}{\infty}$ => נחלק בחזקה הגבוהה 3^n

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3)\frac{3^n}{3^n}}{\frac{\ln(2)2n\cdot 2}{3^n} + \frac{\ln(2)2n3^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3)}{\ln(2)2n} = 0 = \frac{1}{\infty}$

$\downarrow$
0

מש"ל

04/10

6.א מצא פונקציה גזירה f שאינה זהותית 0 המקיימת

$$[f(x)]^2 = \int_0^x \frac{f(t)\sin t\,dt}{2+\cos t} \Rightarrow$$

(נגזור את שני אגפי השוויון

$$2f'(x)\cancel{f(x)} = \frac{\cancel{f(x)}\sin(x)}{2+\cos(x)} \qquad f'(x) = \frac{\sin(x)}{2(2+\cos(x))}$$

$$-\frac{1}{2}\ln|2+\cos x| = \qquad -0.084$$

$$f'(x) = \frac{\sin(x)}{2(2+\cos(x))} \qquad f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin x}{(2+\cos(x))}dx = (*)$$

$$= \ln\left|\frac{1}{\sqrt{2+\cos x}}\right| + C = f(x) \neq 0 \qquad * \; -0.248$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (*) \quad \cos x = t \quad dt = -\sin(x)dx \quad = +\frac{1}{2}\int \frac{-dt}{2+t} = \\ -\frac{1}{2}\ln|2+\cos(x)| + C = f(x) \end{array} \right\}$$

$\Downarrow$

גזירה, $0 \neq$

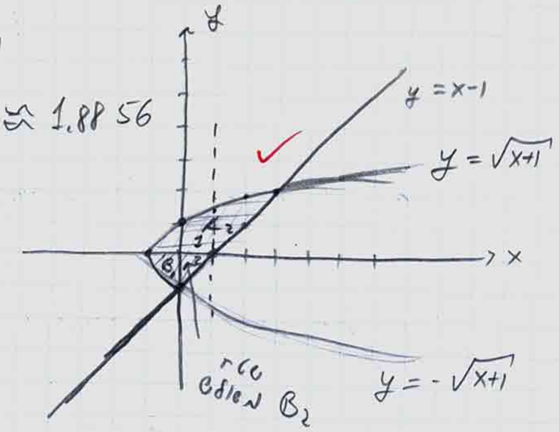
-2

(ב. 6) $y=x-1$

$y^2=x+1$

מצא שטח החסום בין העקומים

$$A_1=\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1}\,dx=\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_{-1}^{1}\cong 1.8856$$



$$A_2=\int_{1}^{3}\left(\sqrt{x+1}-x+1\right)dx=\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}+x\Bigg]_{1}^{3}\cong\frac{23}{6}-2.3856$$

$$B_1=\int_{-1}^{0}-\sqrt{x+1}\,dx=-\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_{-1}^{0}=-\frac{2}{3}$$

$$B_2=\int_{0}^{1}(x-1)=\frac{x^2}{2}-x\Bigg]_{0}^{1}=\frac{1}{2}-1-0+0=-\frac{1}{2}$$

$$\int_{\text{שטח}}=A_1+A_2\underbrace{-B_1-B_2}_{\text{מתחת לציר}}\cong 1.8856+\frac{23}{6}-2.3856+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=$$

$$\underline{\underline{4.5}}$$

(3.א) נתונה פונקציה f המוגדרת וגזירה על $(1,\infty)$ כך שלכל x מתקיים

$$|f'(x)| < \frac{\ln(x)}{x^2}$$

צ"ל:

$$[f(2x)-f(x)] \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

מכיוון והפונקציה גזירה בתחום $(1,\infty)$ היא גם רציפה בו, נבחר כל תת קטע סגור בתחום $(1,\infty)$ אזי הפונקציה גזירה בו בוודאי וגם רציפה, למשל כל $x \in (1,\infty)$ כך ש:

$$[x,2x] \subset (1,\infty)$$

לכן לפי לגרנז' קיבלנו פונקציה רציפה בקטע סגור ובמובן גם גזירה בקטע פתוח.

נבחר תת קטע $[x,2x]$, $x \in (1,\infty)$

$\Rightarrow$ לפי לגרנז': $f(2x)-f(x) = f'(c)(2x-x) = f'(c)\cdot x$

$$\Rightarrow \frac{f(2x)-f(x)}{x} = f'(c)$$

$\Rightarrow$ קיבלנו שקיימת נק' $c \in [x,2x]$

כעת נבדוק את הנגזרת, אנו יודעים כי:

$$-\frac{\ln(x)}{x^2} < f'(c) < \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{\ln(x)}{x^2} < \frac{f(2x)-f(x)}{x} < \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$x>0$ לכן ניתן להכפיל: $x>$!

$$\Rightarrow \underbrace{-\frac{\ln(x)}{x}}_{\text{(א)}} < f(2x)-f(x) < \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\text{(ב)}}$$

(א) $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} -\frac{\ln(x)}{x} = -\frac{\infty}{\infty}$ Lhopital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x} = 0 \,!$$

ב) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty}$ Lhopital $= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

<= קיבלנו: $-\frac{\ln(x)}{x} < f(2x) - f(x) < \frac{\ln(x)}{x}$

$\xrightarrow{x\to\infty} 0$

15/15

<= לכן בהכרח לפי סנדוויץ' $\Rightarrow [f(2x) - f(x)] \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

מש"ל

3ב) $f(x) = (x + tg x)^{(\cos x)^2}$

נתון:
צ"ל: $f'(x)$

$\ln f(x) = [\cos(x)]^2 \ln(x + tg(x))$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = -2\sin x\cos x \ln(x + tg(x)) + \cos^2 x \frac{1 + \frac{1}{\cos^2 x}}{x + tg(x)} =$

$= \left(-\sin 2x \ln(x + tg(x)) + \frac{\cos^2 x + 1}{x + tg(x)}\right) f(x)$

$\Rightarrow f'(x) = \left(-\sin 2x \ln(x + tg(x)) + \frac{\cos^2 x + 1}{x + tg(x)}\right)(x + tg(x))^{(\cos x)^2}$

08/08

④ $y = \dfrac{x}{\sqrt{|x^2-1|}}$

תחום: $x \neq \pm 1$ זוגיות: $f(-x) = \dfrac{-x}{\sqrt{|x^2-1|}} = -f(x)$ אי זוגית

אס:

$\lim_{x\to 1^{\pm}} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to -1^{\pm}} f(x) = -\infty$

לא מחזורית $f(x+T) \neq f(x)$

נחלק את הפונקציה

1C) $|x| \geq 1$ $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$y = kx + b$ $k = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} = 0$

לא קיים

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}} = 1$

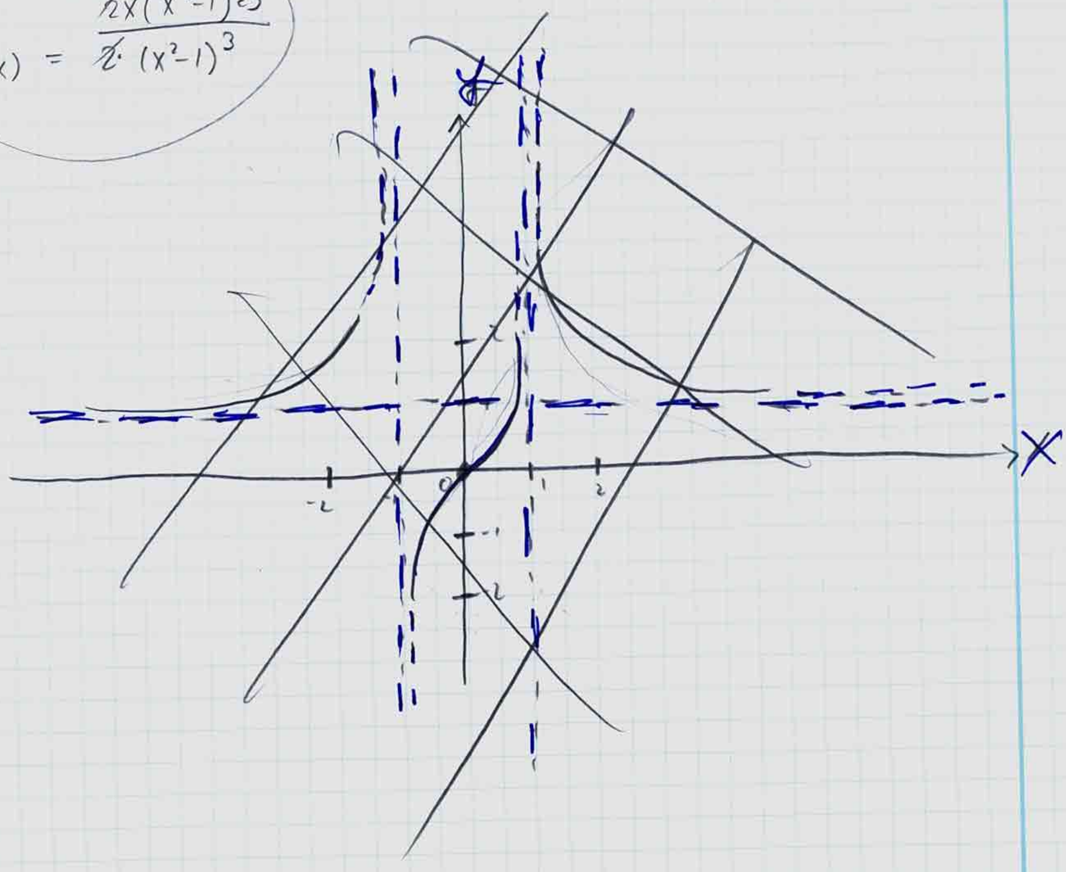
$f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{(x^2-1)} = \dfrac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}\,(x^2-1)} = 0$ $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{x}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -1$

$= \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}\,(x^2-1)} = 0$

אין נק' קיצון

-1 1

$f''(x) = \dfrac{2x(x^2-1)\cdot 3}{2\cdot(x^2-1)^3}$



$$y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad |x|<1$$ ⑦

$$y=ax+b$$

$$\cancel{\exists}\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)}=\frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)}$$

$(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$ אין דיפון!

+ +
-1 0 1

$$f''(x)=\frac{-2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}3}{2(1-x^2)^3}=0$$

נק' פיתול $x=0$

− −1 + 0 − 1 +

קעורות $-1<x\le 0$, $x>1$

קמורות $x<-1$, $0\le x<1$

נק' חיתוך $x=0$, $y=0$

אס' משופעות

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$$

אס'

גרף