

בוחר בקורס מבוא לחוגים ומודולים 88-212 סמסטר ב' תשע"ח

הוראות כתבו באופן ברור שם מלא ומספר ת"ז.
יש לענות על כל השאלות פתרון מלא ומנומק. נא לכתוב בעט כחול או שחור.
משך הבוחן: 80 דקות.
חומר עזר: אין.

שאלה 1. נתבונן בחוג $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$

א. הוכיחו כי ההעתקה

$$\begin{aligned}\theta: \mathbb{Z}[\sqrt{2}] &\rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \\ a + b\sqrt{2} &\mapsto a - b\sqrt{2}\end{aligned}$$

היא אוטומורפיזם של החוג.

ב. הוכיחו כי ההעתקה θ מהסעיף הקודם והעתקת הזהות הן האוטומורפיזמים היחידים של $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

שאלה 2. נתבונן בחוג $R = \mathbb{C}[x]$

א. יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ מספרים מרוכבים שונים. הוכיחו כי האידאלים $\langle x - \alpha \rangle$ ו- $\langle x - \beta \rangle$ הם קו־מקסימליים.

ב. לכל $n \in \mathbb{N}$ מצאו אידאל $I_n \triangleleft R$ המקיים $R/I_n \cong \mathbb{C}^n$.

שאלה 3. יהי R חוג חילופי.

א. הוכיחו שכל אידאל ראשוני מכיל את כל האיברים הנילפוטנטיים.

ב. תהי $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots$ שרשרת של אידאלים ראשוניים ב- R . הוכיחו כי איחוד האידאלים $\bigcup_i P_i \triangleleft R$ הוא אידאל, ושהוא ראשוני.

בהצלחה!