תזכורת: חבורה $G$ נקראת פתירה אם יש לה סדרה תת נורמלית שכל הגורמים בה אבליים. ראינו שזה שקול לכך שיש לה סדרת שבה כל הגורמים אבליים (ולכן ציקליים, כי בסדרת הרכב הגורמים פשוטים).

**משפט.** (מההרצאה) כל חבורת $p$ היא פתירה, עבור $p$ ראשוני.

חבורת $p$ זה אומר ש־$|G| = p^n$. נעשה אינדוקציה על $n$. אז המרכז לא טריוואילי, ולכן הוא תת חבורה נורמלית ואבלית.

$$\{e\} \trianglelefteq Z(G) \trianglelefteq G$$

$$|G/Z(G)| = p^m$$

עבור $m < n$. ידוע מהנחת האינדוקציה ש־$G/Z(G)$. אז יש לה סדרה תת נורמלית. ממשפט ההתאמה זה מתאים לסדרה של תתי חבורות נורמלית בין $G$ ל־$Z(G)$, והמנות אותו דבר מאיזו 3.

$$N/Z(G) \trianglelefteq G/Z(G)$$

$$(G/Z(G))/(N/Z(G)) \cong G/N$$

ולכן המנות נשמרות.

בהוכחה דומה אפשר להראות שאם ל־$G$ יש תת חבורה נורמלית $N$ כך ש־$N$ פתירה ו־$G/N$ אז $G$ פתירה.

כי

$$\{e\} \trianglelefteq N \trianglelefteq G$$

בין $N$ ל־$\{e\}$ אפשר לדחוף סדרה תת נורמלית עם מנות אבליות, מהפתירות של $N$. ובין $G$ ל־$N$ אפשר לדחוף סדרה תת נורמלית באמצעות הפתירות של $G/N$.

**תרגיל.** הוכיחו שכל חבורה מסדר $3^2 \cdot 11^2$ היא פתירה.

פתרון. $n_{11} \equiv 1 \mod 11$, $n_{11} \mid 3^2$. אז $n_{11} = 1$. לכן חבורת 11 סילו נורמלית, נקרא לה $P$, ולחבורה המקורית נקרא $G$. אז

$$\{e\} \trianglelefteq P \trianglelefteq G$$

$|P| = 11^2$ ולכן אבלית, ו־$|G/P| = 3^2$ ולכן אבלית. מצאנו סדרה תת נורמלית עם גורמים אבליים.

**תרגיל.** הוכיחו שכל חבורה מסדר $3^2 \cdot 11^3$ היא פתירה.

פתרון. חבורת 11 סילו, $P$, עדיין תהיה יחידה ולכן נורמלית. $P$ היא חבורת $p$ ולכן פתירה. $G/P$ היא חבורה אבלית (מסדר $3^2$) ולכן פתירה. לפי המשפט שציטטנו מההרצאה, אם יש תת חבורה נורמלית שהיא פתירה והמנה בה פתירה אז החבורה המקורית פתירה.

**הגדרה.** תהי $G$ חבורה. חבורת הנגזרת של $G$,

$$G'=\langle [x,y]=xyx^{-1}y^{-1}|x,y\in G\rangle$$

**דוגמה.** $G$ חבורה אבלית אמ"ם $G'=\{e\}$.

הערה. $G'$ היא תת חבורה נורמלית.

**מסקנה.** אם $G$ היא חבורה פשוטה לא אבלית, אז $G'=G$. כי $G'$ נורמלית, ולכן $G\vee\{e\}=G'$, אבל $G$ לא אבלית לכן $G'=G$.

**דוגמה.** $A_n'=A_n$ לכל $n\geq 5$.

**הגדרה.** אם $G'=G$ קוראים ל$G$ "חבורה מושלמת". למשל $A_n$ לכל $n\geq 5$ הן חבורות מושלמות.

טענה. $G/G'$ היא המנה האבלית המקסימלית. כלומר, היא אבלית. ואם $N$ היא תת חבורה נורמלית כך ש$G/N$ אבלית, אז $G'\leq N$. הסבר: $G/N$ היא אבלית אמ"ם לכל $x,y\in G$ מתקיים $xNyN=yNxN$ אמ"ם $xyN=yxN$ אמ"ם $xy(yx)^{-1}=xyx^{-1}y^{-1}\in N$ אמ"ם $G'\subseteq N$.

**תרגיל.** חשבו את $D_4'$.

פתרון. $Z(D_4)=\langle\sigma^2\rangle\trianglelefteq D_4$. $|D_4/\langle\sigma^2\rangle|=4$. לכן $D_4/\langle\sigma^2\rangle$ אבלית, אז $D_4'\subseteq\langle\sigma^2\rangle$. ב$\langle\sigma^2\rangle$ יש שני איברים, לכן $D_4'=\langle\sigma^2\rangle\vee\{e\}$. לא ייתכן $\{e\}$, כי החבורה לא אבלית. מכאן נקבל ש $D_4'=\langle\sigma^2\rangle$.

**תרגיל.** חשבו את $S_n'$ עבור $n\geq 5$.

פתרון. $|S_n/A_n|=2$ ולכן אבלית. אז זה אומר ש$S_n'\subseteq A_n$. אבל $S_n'$ היא נורמלית ב$S_n$ ולכן ברור שהיא נורמלית ב$A_n$לכן היא או הטריוויאלית או $A_n$. היא לא חבורה טריוויאלית כי $S_n$ לא אבלית. לכן $S_n'=A_n$.

**הגדרה.** תהי $G$ חבורה. מגדירים את סדרת הנגזרות באופן הבא:

$$G^{(0)}=G$$

$$G^{(n+1)}=(G^{(n)})'$$

למשל

$$G^{(1)=}G'=[G,G]$$

$$G^{(2)}=(G')'=[G',G']$$

מתקיים:

$$...\trianglelefteq G''\trianglelefteq G'\trianglelefteq G$$

וכל המנות אבליות.

**משפט.** $G$ פתירה אמ"ם קיים $n$ כך ש$G^{(n)}=\{e\}$.
שימו לב שאם $G$ חבורה סופית הדרך היחידה שבה לא נגיע ל$\{e\}$ אם מתישהו הסדרה מתקבעת, כלומר יש $n$ כך ש$G^{(n)}=G^{(n+1)}$.
לדוגמא, אנחנו יודעים ש$S_n$ לא פתירה לכל $n\geq 5$, ואכן סדרת הנגזרות נראית כך:

$$G^{(0)}=S_n$$

$$G^{(1)}=A_n$$

$$G^{(2)}=A_n$$

**תרגיל.** תהי $G$ חבורה פתירה לא טריוויאלית. הוכיחו שיש ל$G$ תת חבורה נורמלית לא טריוויאלית אבלית.

הוכחה. יש איזשהו $t$ כך ש$G^{(t)}=\{e\}$. נקח את ה$t$ המינימלי הזה. אז נקח $N=G^{(t-1)}$. זה אומר ש$N'=\{e\}$ ולכן $N$ אבלית. לא טריוויאלית בגלל המינימליות של $t$. ו$N\trianglelefteq G$ כי היא חבורת נגזרת. $\square$

**תרגיל.** תהי $G$ חבורה לא אבלית מסדר 28. הוכיחו ש$|G'|=7$.

פתרון. $28=2^2\cdot 7$. חבורת 7 סילו היא יחידה ולכן נורמלית. נקרא לה $P$. $|G/P|=4$ ולכן $G/P$ היא אבלית, אז $G'\subseteq P$. $P$ מגודל 7 ולכן התתי חבורות היחידות שלה הם $\{e\}$ ו$P$. $G'$ לא יכולה להיות $\{e\}$ כי נתון ש$G$ לא אבלית. לכן $G'=P$.

# מיון חבורות אבליות סופיות

**משפט.** אתם בטח זוכרים שאם $(n,m)=1$ אז $\mathbb{Z}_{nm}\cong\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_m$.
לכן אם $n=p_1^{m_1}\cdots p_k^{m_k}$ הפירוק שלו לגורמים ראשוניים, אז $\mathbb{Z}_n\cong\mathbb{Z}_{p_1^{m_1}}\times\mathbb{Z}_{p_k^{m_k}}$
מכפלות שונות של $\mathbb{Z}_{p^i}$ לא יכולות להיות איזומורפיות (זה נקבע ביחידות עד כדי סדר החבורות)
נניח

$$\mathbb{Z}_{p^2}\ncong\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p$$

$$\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_{p^3}\ncong\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{p^2}$$

ניתן לראות את זה לפי סדרי איברים (חישבו מה הסדר המקסמילי של איבר בכל אחת מהחבורות).
משפט המיון אומר שכל חבורה אבלית סופית היא מהצורה

$$\mathbb{Z}_{n_1}\times\cdots\mathbb{Z}_{n_k}$$

כאשר כל אחד מ$n_i$ הוא חזקה של ראשוני. והפירוק יחיד עד כדי סדר הגורמים.

**תרגיל.** הוכיחו כי $\mathbb{Z}_{200} \times \mathbb{Z}_{20} \cong \mathbb{Z}_{100} \times \mathbb{Z}_{40}$

פתרון. $200 = 2^3 \cdot 5^2, 20 = 2^2 \cdot 5$

$$\mathbb{Z}_{200} \times \mathbb{Z}_{20} \cong \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$$

$$100 = 2^2 \cdot 5^2, 2^3 \cdot 5$$

$$\mathbb{Z}_{100} \times \mathbb{Z}_{40} \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_5$$

**תרגיל.** כמה חבורות אבליות יש מסדר $p^n$ עד כדי איזומורפיזם?

פתרון.

$$\mathbb{Z}_{p^n}, \mathbb{Z}_{p^{n-1}} \times \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_{p^{n-2}} \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, ...$$

זה בעצם שווה למספר הדרכים לכתוב את $n$ כסכום של מספרים שלמים אי שליליים. זאת הפונקציה שמסומנת $\rho(n)$ שראינו אותה במספר מחלקות הצמידות ב$S_n$.

**תרגיל.** כמה חבורות אבליות יש מסדר $n$?

פתרון. $n = \prod p_i^{m_i}$. לכן מספר החבורות הוא $\prod \rho(m_i)$

**דוגמה.** כמה חבורות אבליות יש מסדר $2^3 \cdot 5^2$?

פתרון. $\rho(3) \cdot \rho(2) = 3 \cdot 2 = 6$

**תרגיל.** כתבו את כל החבורות האבליות מסדר 180עד כדי איזומורפיזם.

פתרון. $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ אז יהיו $\rho(2) \cdot \rho(2) \cdot \rho(1) = 4$

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$$

**תרגיל.** נתונה רשימה של חבורות. מיינו אותם למחלקות איזומורפיזם.

$$\mathbb{Z}_{180}$$

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{45}$$

$$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{18}$$

$$\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{20}$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{30}$$

$$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{15}$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{90}$$

פתרון. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{30} \cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{15}$ ניתן לראות כי $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ו$\mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{15}$.
4 ו45 זרים לכן $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{45} \cong \mathbb{Z}_{180}$.
גם 9 ו20 זרים לכן $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{20} \cong \mathbb{Z}_{180}$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{90} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{18}$
וניתן להראות שאין עוד איזומורפיזמים ע"י חישוב הסדר המקסימלי בחבורה שהוא ה$lcm$ של גדלי החבורות.