פתרון מועד א' שנת תשעד

תרגיל 1.1 מצא את שדה הפיצול של הפולינום x^4-9 מעל $\mathbb{Q}$. מהי חבורת גלואה?

פתרון: ראשית נשים לב שהפולינום מתפרק ל $(x^2-3)(x^2+3)$. השורשים של הפולינום הם $\pm\sqrt{3},\pm i\sqrt{3}$ לכן שדה הפיצול הוא

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{3}i)$$

כמובן שאפשר לכתוב זאת גם בתור

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3},i)$$

נסמן

$$E=\mathbb{Q}(\sqrt{3},i)$$

ונשים לב ש $E/\mathbb{Q}$ היא הרחבת גלואה כי E הוא שדה פיצול של הפולינום הספרבילי $(x^2-3)(x^2+3)$. ראשית נמצא את המימד של ההרחבה. כמובן ש

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{3}):\mathbb{Q}]=2$$

כי הפולינום המינימלי הוא x^2-3. בנוסף $i\notin\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ויש לו פולינום מאפס x^2+1 ולכן

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{3},i):\mathbb{Q}(\sqrt{3})]=2$$

לפי הכפליות של המימד.

$$[E:\mathbb{Q}]=4$$

היות שזו הרחבת גלואה אנו יודעים שהגדול של חבורת גלואה הוא 4. אז אין הרבה אופציות לגבי מה החבורה $\mathbb{Z}_4$ או $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. נניח ש φ אוטומורפיזם כלשהוא של חבורת גלואה. הוא חייב לשלוח שורש של x^2-3 לשורש אחר ולכן

$$\varphi(\sqrt{3})=\pm 3$$

בדומה הוא חייב לשלוח שורש של x^2+1 לשורש אחר ולכן

$$\varphi(i)=\pm i$$

בגלל שאלה יוצרים את כל החבורה נקבל ש φ הוא מסדר 2 ולכל היותר. כלומר כל האיברים בחבורת גלואה הם מסדר 2 לכל היותר. ולכן חבורת גלואה היא

$$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$$

תרגיל 1.2 מצא את שדה הפיצול E של x^5-11 מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. מהי חבורת גלואה של ההרחבה $E/\mathbb{Q}(\sqrt{5})$? הערה $\mathbb{Q}(\sqrt{5})\subseteq\mathbb{Q}(\rho)$ כאשר $\rho=e^{\frac{2\pi i}{5}}$ שורש 5 פרימיטיבי של 1)

פתרון: ראשית נזכור שהפתרונות של הפולינום x^5-11 הם $\sqrt[5]{11}, \sqrt[5]{11}\rho, \sqrt[5]{11}\rho^2, \sqrt[5]{11}\rho^3, \sqrt[5]{11}\rho^4$, נמספר אותם לפי הסדר הזה מ1 עד 5(כדי שנדע לייצג איברים כתמורות).

כמו כן, נשים לב ש x^5-11 הוא אי פריק (אייזנשטיין עם $p=11$). שדה הפיצול x^5-11 מעל $\mathbb{Q}$ הוא לכן

$$\mathbb{Q}(\sqrt[5]{11}, \sqrt[5]{11}\rho, \sqrt[5]{11}\rho^2, \sqrt[5]{11}\rho^3, \sqrt[5]{11}\rho^4) = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{11}, \rho)$$

שדה הפיצול E של x^5-11 מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ הוא

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5})(\sqrt[5]{11}, \rho) = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{11}, \rho)$$

כלומר זה בדיוק אותו שדה פיצול כמו מעל $\mathbb{Q}$. טוב.

השלב הבא זה להבין מה מימד ההרחבה $E/\mathbb{Q}$. הפולינום המינימלי של $\sqrt[5]{11}$ מעל $\mathbb{Q}$ הוא x^5-11 ולכן

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[5]{11}) : \mathbb{Q}] = 5$$

הפולינום המינימלי של ρ מעל $\mathbb{Q}$ הוא $x^4+x^3+x^2+x+1$ (הוכחנו בכיתה שזה אי פריק/זה פולינום הציקלוטומי) ולכן

$$[\mathbb{Q}(\rho) : \mathbb{Q}] = 4$$

היות ש 4 ו 5 זרים, אז לפי משפט שהוכחנו בכיתה (רצוי גם להיזכר ולהבין את ההוכחה) מתקיים

$$[E : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[5]{11}, \rho) : \mathbb{Q}] = 20$$

אנחנו נסתמך על הנתון ש $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\rho)$ בלי לבדוק אותו (שימו לב שבכיתה/ש"ב כן הראנו את זה כשבנינו מצולע 5 רגולרי). משום ש

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 2$$

ולפי כפליות מתקיים ש

$$[E : \mathbb{Q}(\sqrt{5})] = 10$$

נשים לב ש $E/\mathbb{Q}$ היא הרחבת גלואה כי E הוא שדה פיצול של פולינום והשדות ממאפיין 0. לכן גם $E/\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ היא הרחבת גלואה. לכן אם נסמן את החבורות גלואה

$$G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$$

$$H = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\sqrt{5})$$

אז

$$|G| = 20$$

ו

$$|H| = 10$$

שימו לב ש $H \le G$ כלומר H היא תת חבורה של G. בנוסף היות ש E שדה פיצול של פולינום ממעלה 5, חבורת גלואה G (וגם H) משוכנת ב S_5.

עכשיו צריך להתחיל לעבוד עם איברים בחבורת גלואה. נסתכל על ההרחבה $E/\mathbb{Q}(\rho)$. לפי הכפליות זאת הרחבה ממימד 5. לכן הפולינום המינימלי של $\sqrt[5]{11}$ מעל $\mathbb{Q}(\rho)$ הוא עדיין $x^5 - 11$. חבורת גלואה

$$\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\rho))$$

פועלת טרזיטיבית על שורשי הפולינום ולכן יש

$$\tau \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\rho))$$

כך ש

$$\tau(\sqrt[5]{11}) = \sqrt[5]{11}\rho$$

(למה בחרנו דווקא ככה? קל לראות שחבורת גלואה איזומורפית ל $\mathbb{Z}_5$ לפי $\tau \to 1$ אז τ מתאים ליוצר שנוח לעבוד איתו) כמובן ש

$$\tau \in G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$$

ובנוסף

$$\tau(\rho) = \rho$$

והסדר של τ הוא 5 (זאת החזקה הראשונה שבה שני היוצרים נשלחים לעצמם).

באופן דומה, נבחן את ההרחבה

$$E/\mathbb{Q}(\sqrt[5]{11})$$

שוב, משיקולי כפליות זאת הרחבה ממימד 4 ולכן הפולינום המינימלי של ρ מעל $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{11})$ הוא עדיין $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. נזכור ששורשי הפולינום הזה הם

$$\rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4$$

חבורת גלואה

$$\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\sqrt[5]{11}))$$

פועלת טרזיטיבית על השורשים. נסתכל על

$$\sigma \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\sqrt[5]{11}))$$

שמוגדר לפי

$$\sigma(\rho) = \rho^2$$

(למה דווקא ככה? ראינו כבר בעבר שחבורת גלואה הזאת איזומורפית ל $U_5 \cong \mathbb{Z}_4$ לפי האיזומורפיזם $\sigma_k \to k$ כאשר

$$\sigma_k(\rho) = \rho^k$$

היות ש 2 יוצר את U_5 (קל לראות שהסדר שלו הוא 4) אז $\sigma = \sigma_2$ יוצר את חבורת גלואה) הסדר של σ הוא 4 (קל לבדוק). נשים לב ש

$$\sigma(\sqrt[5]{11}) = \sqrt[5]{11}$$

כמו כן

$$\sigma \in G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$$

כעת נשים לב ש σ, τ יוצרים את כל G. למה? בתוך $\langle \sigma, \tau \rangle$ יש תת חבורה מסדר 4 ותת חבורה מסדר 5 ולכן הסדר שלה הוא לפחות 20 אבל $|G| = 20$ ולכן

$$\langle \sigma, \tau \rangle = G$$

הערה נוספת: לפי המספור שנתנו לשורשים של $x^5 - 11$, הפעולות של σ, τ הן:

$$\tau \leftrightarrow (12345)$$

$$\sigma \leftrightarrow (2354)$$

נזכור כי המטרה שלנו היא להבין מהי H. ראשית נשים לב ש τ מקבעת את כל $\mathbb{Q}(\rho)$ ולכן בוודאי

$$\tau \in H$$

לעומת זאת $\sigma \notin H$. מה כן אפשר להגיד? נשים לב ש

$$\mathbb{Q}(\rho)/\mathbb{Q}$$

היא הרחבת גלואה עם חבורת גלואה $U_5 \cong \mathbb{Z}_4$. לפי התאמת גלואה, יש רק שדה ביניים אמיתי אחד ולכן

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\rho)^{\mathbb{Z}_2}$$

כאשר אנחנו חושבים על $\mathbb{Z}_2$ כעל תת חבורה של U_5. היות ש σ יוצר את U_5, נקבל ש $\mathbb{Z}_2$ נוצר ע"י σ^2כלומר σ^2 מייצב את $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ולכן

$$\sigma^2 \in H = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\sqrt{5}))$$

(הערה: זיהינו כאן את σ עם תחום E ועם תחום $\mathbb{Q}(\rho)$ כי הוא במילא מקבע את $\sqrt[5]{11}$)
נשים לב שהסדר של σ^2 הוא 2 ולכן הסדר של $\langle \tau, \sigma^2 \rangle$ הוא 10 ולכן בהכרח

$$\langle \tau, \sigma^2 \rangle = H$$

כבר ראינו שבתיאור של פרמוטציה על שורשים

$$\tau \leftrightarrow (12345) \quad \sigma \leftrightarrow (2354)$$

ולכן

$$\tau \leftrightarrow (12345) \quad \sigma^2 \leftrightarrow (25)(34)$$

וקל לראות שאלה יוצרים את D_5 (למשל כי היחסים מתקיימים

$$\tau^5 = 1$$

$$(\sigma^2)^2 = 1$$

$$\sigma^2 \tau = \tau^4 \sigma^2$$

)
ולכן

$$H \cong D_5$$

תרגיל 1.3 F הוא שדה ממאפיין 0 ולכן הרחבה ממימד סופי מעליו היא בעלת ממימד זוגי. הוכח שהמימד של כל הרחבה סופית מעל F היא חזקת 2.

פתרון: תהי נוכיח ש $[K:F]$ הרחבה סופית. נסתכל על הסגור הנורמלי של K, נניח E. אם נוכיח ש $[E:\mathbb{R}]$ הוא חזקת 2 סיימנו כי לפי הכפליות גם $[K:F]$ חזקת 2. נניח בשלילה שהוא לא כלומר נניח $[E:F] = 2^m k$ כאשר k אי זוגי גדול מ 1. נשים לב שההרחבה E/F היא גלואה כי E/F נורמלי ובגלל שהמאפיין 0 הכל ספרבילי. נסתכל על החבורת גלואה

$$G = \mathrm{Gal}(E/F)$$

לפי תורת החבורות קיימת לה תת חבורה 2 סילו מסדר 2^m, נקרא לה H.

$$[G:H] = k$$

ולכן לפי התאמת גלואה

$$[E^H : F] = k$$

בסתירה לכך שאין הרחבות ממימד אי זוגי. ולכן המימד של E (ולכן של K) הוא חזקת 2.

תרגיל 1.4 הוכח שקיים $a \in F_{11}$ כך ש $F_{11}[x]/\langle x^5 - a\rangle$ הוא שדה.

פתרון: זה בעצם אומר שצריך להוכיח שקיים a כך ש $x^5 - a$ הוא פולינום אי פריק. קודם כל כדאי להבין מתי לפולינום הנ"ל יכול להיות שורש ב F_{11}. אם $b \in F_{11}$ שאינו 0 אז לפי פרמה/לגרנז'

$$b^{10} = 1$$

והיות שזה שדה

$$b^5 = \pm 1$$

לכן קיבלנו שיכול להיות לפולינום שורש רק אם $a = \pm 1, 0$ (במקרים אלה קל לבדוק שכן יש שורש ולכן הפולינום פריק). נותרו עוד 8 מקרים שבהם בוודאות אין שורש. צריך להוכיח שבאחד מהם לפחות הפולינום אי פריק. נניח בשלילה שבכולם הפולינום פריק. היות שאין שורש (=גורם אי פריק מדרגה 1) אז חייב להיות גורם אי פריק (מתוקן) מדרגה 2, נסמן אותו $g(x)$. כלומר

$$g(x) \mid x^{11} - \alpha$$

בנוסף, כמו כל פולינום אי פריק מדרגה 2 מעל F_{11}, $g(x)$ מחלק את

$$x^{11^2} - x = x^{121} - x$$

ולכן

$$g(x) \mid x^5 - \alpha \quad g(x) \mid x^{121} - x$$

אם נעשה חישוב מודולו $x^5 - \alpha$ נקבל ש

$$x^{121} - x = x(x^5)^{24} - x = x\alpha^{24} - x = x(\alpha^{24} - 1)$$

כלומר קיים פולינום $\gamma(x)$ כך ש

$$x^{121} - x + \gamma(x)(x^5 - \alpha) = x(\alpha^{24} - 1)$$

היות ש $g(x)$ מחלקת את צד שמאל היא מחלקת גם את צד ימין. כדאי לבחור α כך ש $\alpha^{24} \neq 1$ אחרת זה לא עוזר לנו הרבה (ברור ש $g(x)$ מחלק את 0)

$$\alpha^{24} = \alpha^2(\alpha^{11})^2 = \alpha^2\alpha^2 = \alpha^4$$

נבחר $\alpha = 2$ ואז

$$2^4 = 16 = 5 \neq 1$$

ולכן $g(x)$ מחלק את

$$x(\alpha^{24} - 1) = 5x$$

אבל $g(x)$ הוא פולינום מדרגה 2. סתירה. לכן $x^5 - 2$ למשל אי פריק.

תרגיל 1.5 הוכח שאפשר לבנות (במחוגה וסרגל) זווית בת 24 מעלות.

פתרון: 24 מעלות זאת בעצם זוית של $\frac{2\pi}{15}$ רדיאנים.

שלב ראשון: אפשר לבנות זוית של $\frac{2\pi}{15}$ אם ורק אם המספר $e^{\frac{2\pi i}{15}}$ הוא בר בניה.

הוכחה:נניח שאפשר לבנות את הזוית הנ"ל, בלי הגבלת הכלליות אחת הקרניים תהיה על ציר x בצד החיובי. אז $e^{\frac{2\pi i}{15}}$ הוא החיתוך של הקרן השניה עם עיגול היחידה. מצד שני אם אפשר לבנות את $e^{\frac{2\pi i}{15}}$ אז מותחים קו ממנו לראשית הצירים. הזוית בין הישר הזה וציר x היא בת $\frac{2\pi}{15}$ מעלות כנדרש.

שלב שני: הפולינום המינימלי של $e^{\frac{2\pi i}{15}}$ הוא הפולינום הציקלוטומי ψ_{15} שדרגתו היא

$$\varphi(15) = \varphi(5)\varphi(3) = 4 \cdot 2 = 8$$

ולכן שדה הפיצול של ψ_{15}, דהיינו $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{15}})$ (כי זכרו ששאר השורשים הם גם שורשי יחידה ולכן חזקות של $e^{\frac{2\pi i}{15}}$) הוא ממימד 8. לפי משפט, בגלל שזו חזקה של 2 המספר הוא בר בניה. (אם מקבלים כזאת שאלה במבחן, רצוי לשאול איזה טענות בדיוק צריך להוכיח ועל מה מותר להסתמך בלי הוכחה).