פיתרון תרגיל בית 7 במתמטיקה בדידה 2
83-118 סמסטר ב' תשע"ט

1. פתרו את נוסחאות הנסיגה הבאות:

(א) $M_n = 3M_{n-1} - 2M_{n-2}$ עם תנאי התחלה $M_0 = 0, M_1 = 1$ (הסדרה המתקבלת נקראת סדרת מספרי מרסן).

(ב) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + n + 1$ עם תנאי התחלה $a_0 = 1, a_1 = 3$.

(ג) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2 \cdot 3^{n-2}$ עם תנאי התחלה $a_0 = 1, a_1 = 2$.

(ד) $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ עם תנאי התחלה $a_0 = 3, a_1 = 6, a_2 = 14$.

(ה) $f_n = 8f_{n-1} - 21f_{n-2} + 18f_{n-3}$ עם תנאי התחלה $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 2$.

(ו) $f_n = 3f_{n-1} + 4f_{n-2} - 12f_{n-3}$ עם תנאי התחלה $f_0 = 0, f_1 = f_2 = 1$.

פתרון:

א. הפולינום האופייני של הנוסחא הוא $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, ולכן הפיתרון יהיה מהצורה

$$M_n = \alpha 2^n + \beta \cdot 1^n = \alpha 2^n + \beta$$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל את המערכת

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

ולכן $\alpha = 1, \beta = -1$, ולכן ההצגה המפורשת המתקבלת היא

$$M_n = 2^n - 1$$

ב. הפולינום האופייני של הנוסחא ההומוגנית המתאימה הוא $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. התוספת הלא הומוגנית היא: $\frac{2}{9}3^n$, ומכיון ש־3 איננו שורש של הפולינום האופייני, מצפים למחובר מהצורה $\gamma \cdot 3^n$. נמצא את γ ע"י סימון $a_n = \gamma \cdot 3^n$, והצבה בנוסחא המקורית:

$$\gamma n + \delta = \gamma(n-1) + \delta + 2(\gamma(n-2) + \delta) + n + 1$$

$$\gamma n+\delta=n(3\gamma+1)-5\gamma+3\delta+1$$

$$n(2\gamma+1)-5\gamma+2\delta+1=0$$

מהשוואת מקדמים (של n והחופשי) נקבל מערכת משוואות:

$$\begin{cases}2\gamma+1=0\\ -5\gamma+2\delta+1=0\end{cases}\quad\Rightarrow\gamma=-\frac{1}{2},\delta=-\frac{7}{4}$$

ולכן הפתרון הכללי של הנוסחא יהיה:

$$a_n=\alpha\cdot 2^n+\beta(-1)^n-\frac{1}{2}n-\frac{7}{4}$$

על מנת למצוא את α,β נציב תנאי התחלה:

$$\begin{cases}\alpha+\beta-\frac{7}{4}=1\\ 2\alpha-\beta-\frac{1}{2}-\frac{7}{4}=3\end{cases}\quad\Rightarrow\alpha=\frac{32}{12},\beta=\frac{1}{12}$$

ולסיכום:

$$a_n=\frac{32}{12}\cdot 2^n+\frac{1}{12}(-1)^n-\frac{1}{2}n-\frac{7}{4}$$

ג. הפולינום האופייני של הנוסחא ההומוגנית המתאימה הוא $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$. התוספת הלא הומוגנית היא: $1^n(n+1)$, ומכיון ש־1 איננו שורש של הפולינום האופייני, מצפים למחובר מהצורה $1^n(\gamma n+\delta)$. נמצא את γ,δ ע"י סימון $a_n=1^n(\gamma n+\delta)$, והצבה בנוסחא המקורית:

$$\gamma\cdot 3^n=\gamma\cdot 3^{n-1}+2\gamma\cdot 3^{n-2}+2\cdot 3^{n-2}$$

$$9\gamma=3\gamma+2\gamma+2$$

$$\gamma=\frac{1}{2}$$

ולכן הפתרון הכללי של הנוסחא יהיה:

$$a_n=\alpha\cdot 2^n+\beta(-1)^n+\frac{1}{2}\cdot 3^n$$

על מנת למצוא את α, β נציב תנאי התחלה:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \frac{1}{2} = 1 \\ 2\alpha - \beta + \frac{3}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{1}{6}$$

ולסיכום:

$$a_n = \frac{1}{3} \cdot 2^n + \frac{1\beta}{6}(-1)^n + \frac{1}{2} \cdot 3^n$$

ד. הפולינום האופייני של הנוסחא הוא: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. נשים לב ש־1 הוא שורש של הפולינום. נבצע חילוק פולינומים:

$$\begin{array}{c|c} x^2 - 5x + 6 & \\ \hline x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\ x^3 - x^2 & \\ \downarrow & \\ -5x^2 + 11x - 6 & \\ -5x^2 + 5x & \\ \downarrow & \\ 6x - 6 & \\ 6x - 6 & \\ \downarrow & \\ 0 & \end{array}$$

כלומר, $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x-3)$. לכן הפתרון הכללי יהיה מהצורה:

$$a_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot 2^n + \gamma \cdot 3^n$$

ועל מנת למצוא את הקבועים α, β, γ נציב את תנאי ההתחלה ונקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 3 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 6 \\ \alpha + 4\beta + 9\gamma = 14 \end{cases}$$

נפתור:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 1$$

ולכן נקבל:

$$a_n = 1 + 2^n + 3^n$$

ה. הפולינום האופייני הוא:

$$x^3 - 8x^2 + 21x - 18$$

נשים לב ש־2 הוא שורש של הפולינום. נבצע חילוק פולינומים ונקבל שניתן לפרק אותו לצורה

$$(x-2)(x-3)^2 = 0$$

כלומר שורשיו הם: 2 מריבוי 1, ו־3 מריבוי 2. לכן הפיתרון הכללי יהיה מהצורה:

$$f_n = \alpha 2^n + \beta 3^n + \gamma n 3^n$$

ושוב, על מנת למצוא את הקבועים α, β, γ נציב את תנאי ההתחלה ונקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 3\gamma = 1 \\ 4\alpha + 9\beta + 18\gamma = 2 \end{cases}$$

פתרונות המערכת הם: $\alpha = -4, \beta = 4, \gamma = -1$, ולכן האיבר הכללי הוא:

$$f_n = -4 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n - n \cdot 3^n$$

ו. הפולינום האופייני של הנוסחא הוא $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ הניתן לייצוג כ־ $(x-2)(x+2)(x-3)$, ולכן נקבל שהשורשים הם: $2, -2, 3$. לכן הפיתרון הכללי יהיה מהצורה

$$f(n) = \alpha 2^n + \beta(-2)^n + \gamma 3^n$$

נמצא את α, β, γ על פי תנאי ההתחלה. כלומר נפתור את המערכת

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha - 2\beta + 3\gamma = 1 \\ 4\alpha + 4\beta + 9\gamma = 1 \end{cases}$$

הפיתרון המתקבל הוא: $\alpha = 0, \beta = -\frac{1}{5}, \gamma = \frac{1}{5}$. ולכן פיתרון נוסחת הנסיגה הוא

$$f(n) = \frac{3^n}{5} - \frac{(-2)^n}{5}$$

2. מצאו פתרון פרטי לנוסחת הנסיגה $2a_n = 7a_{n-1} - 3a_{n-2}$ עם תנאי התחלה $a_0 = 1$, החסום ע"י קבוע (כלומר, קיים $M \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $|a_n| \leq M$).

<u>פתרון:</u>

הפולינום האופייני של הנוסחא הוא: $2x^2 - 7x + 3 = 2(x-3)(x-\frac{1}{2})$. לכן פתרון כללי יהיה מהצורה:

$$a_n = \alpha \cdot 3^n + \beta \cdot \frac{1}{2^n}$$

כעת, נשים לב שאם $\alpha \neq 0$ אז הפתרון לא חסום, כי: נניח $\alpha, \beta > 0$ (הסבר: אם שניהם שליליים אז הערך המוחלט נותן לנו אותו דבר כמו ששניהם חיוביים, אם $\alpha > 0, \beta \leq 0$ אז מה שאני עושה יותר חזק, ואם זה הפוך אז שוב הערך המוחלט מחזיר למצב העכשווי). כעת, לכל M קיים $n_0 = \lfloor \log_3(\frac{M}{\alpha}) \rfloor + 1$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים: $\alpha 3^n > M$ ולכן: $|a_n| > M$. לכן דרוש $\alpha = 0$. כעת נמצא את β לפי תנאי ההתחלה:

$$1 = \beta \cdot \frac{1}{2^0} \Rightarrow \beta = 1$$

כלומר, הפתרון הפרטי המקיים את תנאי השאלה הוא:

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

3. כידוע, קו ישר מחלק את המישור לשני אזורים נפרדים. נסמן ב־a_n, את מספר האזורים המתקבלים מ־n ישרים העוברים במישור, כך שכל זוג ישרים נחתכים, ואין שלושה ישרים הנחתכים בנקודה אחת. מצא את הביטוי המפורש ל־a_n. הדרכה: מצא תחילה נוסחת נסיגה.

<u>פתרון:</u>

נתבונן ב־n הישרים כ־$n-1$ ישרים ועוד ישר אחד. הישר החדש מפצל כל אזור שהוא עובר בו לשני אזורים. השאלה היא: דרך כמה אזורים הוא עובר?

הישר ה־n חותך $n-1$ ישרים. נשים לב ש־$n-1$ ישרים אלה חוצצים בין n אזורים. לכן נקבל שהישר עובר ב־n אזורים ומפצל כל אחד מהם ל־2, כלומר מוסיף עוד n אזורים חדשים. לכן נוסחת הנסיגה המתקבלת היא

$$a_n = a_{n-1} + n$$

כאשר תנאי ההתחלה הוא $a_0 = 1$ (אם אין ישרים אז יש אזור אחד).

נקבל את הפולינום האופייני של ההומוגנית: $x - 1$. החלק הלא הומוגני הוא $1^n \cdot n$, וכיון ש־1 הוא שורש של הפולינום האופייני נחפש פתרון פרטי מהצורה: $1^n \cdot (n(\gamma n + \delta)) = 1^n \cdot (\gamma n^2 + \delta n)$. נמצא ע"י סימון $a_n = \gamma n^2 + \delta n$ ולכן:

$$\gamma n^2 + \delta n = \gamma (n-1)^2 + \delta(n-1) + n$$

$$\gamma n^2 + \delta n = \gamma n^2 - 2\gamma n + \gamma + \delta n - \delta + n$$

$$n(-2\gamma + 1) + \gamma - \delta = 0$$

ולכן:

$$\begin{cases} -2\gamma+1=0 \\ \gamma-\delta=0 \end{cases} \Rightarrow \gamma=\frac{1}{2}, \delta=\frac{1}{2}$$

כלומר, התוספת הלא הומוגנית היא $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$.

פתרון כללי:

$$a_n=\alpha\cdot 1^n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

ובעזרת תנאי ההתחלה $a_0=1$ נקבל:

$$1=\alpha$$

ופתרון פרטי הוא:

$$a_n=1+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

אפשר גם להסתכל על זה באופן הבא: אם נפתח את הנוסחא עוד ועוד נקבל:

$$a_n=a_{n-1}+n=a_{n-2}+(n-1)+n=a_{n-3}+(n-2)+(n-1)+n=...$$

ולכן ניתן לנחש ש־

$$a_n=a_0+1+2+3+...+(n-1)+n$$

ואז להוכיח שזה אכן נכון באינדוקציה.

בהינתן ההוכחה (משאיר זאת לכם), אז לפי סכום סדרה חשבונית נקבל

$$a_n=a_0+\frac{(1+n)\cdot n}{2}=1+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n^2$$

4. יהי $p\in\mathbb{R}$ המקיים $0<p<1$. מצאו פתרון כללי לנוסחת הנסיגה הבאה: $a_n=pa_{n+1}+(1-p)a_{n-1}$. שימו לב שהנוסחא לא מוצגת בצורה הרגילה שלה. הצורה הרגילה של נוסחא זו היא: $pa_n=a_{n-1}-(1-p)a_{n-2}$. ($p$ פרמטר, שימו לב לפתרונות שונים עבור ערכים שונים של הפרמטר).

<u>פתרון:</u>

נקבל את הפולינום האופייני $px^2-x+(1-p)=0$, ולכן

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4p(1-p)}}{2p}$$

נשים לב ש־$p=\frac{1}{2} \iff (2p-1)^2=0 \iff 1-4p(1-p)=0$, כלומר נקבל את השורש $\frac{1}{2}$ בריבוי 2, ולכל $p\neq\frac{1}{2}$ נקבל שני שורשים שונים: $x_1=\frac{1+(2p-1)}{2p}=1, x_2=\frac{1-(2p-1)}{2p}=\frac{1}{p}-1$.
לכן, הפיתרון הוא מהצורה

$$\begin{cases} \frac{\alpha n+\beta}{2^n} & p=\frac{1}{2} \\ \alpha(\frac{1}{p}-1)^n+\beta & p\neq\frac{1}{2} \end{cases}$$