תרגיל 2 טופולוגיה

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. האם קיים שיכון איזומטרי בין המרחבים הבאים? הוכיחו או הפריכו.

   (א) $\{\sqrt{3}-\frac{n}{2n+5} \mid n\in\mathbb{N}\}\to\mathbb{Q}\cap(2016,\infty)$ (המטריקות כאן הן $d(x,y)=|x-y|$)

   (ב) $(\mathbb{Z},d_5)\to(\mathbb{Z},d_7)$

2. יהי (X,d) מרחב מטרי.

   (א) הוכיחו כי לכל $x\in X$ מתקיים כי $\{x\}$ תת קבוצה סגורה של X.

   (ב) תנו דוגמא נגדית לסעיף א' אם X הוא רק מרחב פסאודו מטרי.

   (ג) הוכיחו כי כל קבוצה סופית היא סגורה.

   (ד) הוכיחו כי כל כדור סגור הוא קבוצה סגורה.

3. נביט על המרחב $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ של המספרים האי רציונלים עם המטריקה הסטנדרטית של $\mathbb{R}$. הראו כי הוא לא קשיר (למשל, הסתכלו על קבוצת האי רציונליים החיוביים, האם היא פתוחה? האם היא סגורה?).

4. הוכיחו שבמרחב $(\mathbb{Z},d_p)$ כל כדור פתוח שמרכזו באפס $B(0,r)$ הוא קבוצה סגוחה ותת חבורה.

5. יהי X המרחב המטרי של כל הסדרות מעל $\mathbb{R}$. המטריקה היא $d(a_n,b_n)=\frac{1}{m}$ כאשר m הוא האינדקס המינימלי שבו $a_m\neq b_m$. (כמובן אם הסדרות זהות המרחק הוא 0).

   (א) הוכיחו כי קבוצת הסדרות המתחילות ב $0,1,2$ או ב $3,4,5,6$ היא קבוצה פתוחה.

   (ב) הוכיחו כי קבוצת הסדרות הקבועות היא קבוצה סגורה.

6. קבעו אילו מהמטריקות הבאות שקולות על $\mathbb{Z}$?

   (א) d_5.

   (ב) d_7.

(ג) מטריקה $0-1$ כלומר

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$$

(ד) והמטריקה המושרית מהמטריקה הסטנדרטית על $\mathbb{R}$ (כלומר $d(x,y)=|x-y|$).

7. נגדיר את S להיות קבוצת הסדרות הממשיות שהטור שלהן מתכנס בהחלט, כלומר

$$S=\{a_n \mid \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty\}$$

נגדיר על קבוצה זו שתי מטריקות:

$$d(a_n,b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n-b_n|$$

$$\rho(a_n,b_n)=\sup\{|a_n-b_n| \mid n\in\mathbb{N}\}$$

האם המטריקות שקולות? הוכיחו.

8. יהי (X,d) מרחב מטרי. נגדיר $\rho:X\to\mathbb{R}$ לפי

$$\rho(x,y)=\min\{1,d(x,y)\}$$

(א) הוכיחו כי ρ היא מטריקה.

(ב) הוכיחו כי ρ ו d שקולות.

(ג) הסיקו שכל מטריקה שקולה למטריקה חסומה.