

תרגיל בית 7 - מופשטת 1

שאלה 1

(א) חשבו את aba^{-1} עבור:

$$(1) \quad a = (1\ 3\ 5)(1\ 2) \text{ ו- } b = (1\ 5\ 7\ 9)$$

$$(2) \quad a = (1\ 3\ 8) \text{ ו- } b = (1\ 8\ 3\ 9)$$

(ב) מצאו גודל של מחלקת צמידות $[\beta] = \{g^{-1}\beta g : g \in S_{15}\}$ של האיבר $\beta = (3,2,6,9)$ ואת סדר המייצב של β (תחת פעולת ההצמדה).

(ג) תהי $H \leq S_9$ תת חבורה הנוצרת על ידי $(123)(789)$ ו- (345) . נניח ש- H פועלת (הפעולה הטבעית) על $X = \{1,2,3,\dots,9\}$. כמה מסלולים יש לפעולה זו ומהו סדרם של מסלולים אלו?

שאלה 2

(א) כמה מחלקות צמידות יש בחבורה S_6 ?

(ב) תהא $G = S_4$ הפועלת על הקבוצה $X = \{1,2,3,4\}$ ע"י $g * x = g(x)$. חשבו את המייצב של $x = 2$. האם המייצב של $x = 2$ הוא ת"ח נורמלית של G ? נמקו.

שאלה 3

תנו דוגמא לפעולה נאמנה של חבורה (לא טריוויאלית) G על קבוצה X עם איבר $x \in X$ כך ש- $G_x = G$. $Stab(x) = G_x = G$. תזכורת: פעולה היא נאמנה אם רק איבר היחידה פועל באופן טריוויאלי.

שאלה 4

תהי G חבורה סופית מסדר אי זוגי. הוכיחו שלכל $x \in G, x \neq 1$, אינו צמוד להופכי שלו.
(שימו לב שיש יותר מדרך אחת לפתור שאלה זו, אך על מנת לתרגל את המושגים הטריים יותר, נסו לפתור אותה באמצעות מחלקות צמידות.)

אולי שאלת בונוס

א. תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X . תהי H תת חבורה נורמלית כלשהי של G . נגדיר $X_H = \{x \in X : hx = x \ \forall h \in H\}$. הוכיחו ש- G משאירה את X_H במקום (כלומר: $gx \in X_H \ \forall x \in X_H$).

ב. D_4 פועלת על קודקודי ריבוע בדרך הרגילה. פעולה זו מגדירה גם פעולה על כל הזוגות הלא-סדורים של קודקודים, $12,13,14,23,24,34$. מצאו את הקבוצה X_H כאשר H היא מרכז החבורה, ואשרו שהחבורה שומרת על

קבוצה זו במקומה, למרות שהנקודות שלה אינן נקודות שבת משותפות לכל אברי החבורה.

שאלת רשות חביבה (ללא ניקוד וללא בדיקה)
תהי G חבורה מסדר p^n עבור p ראשוני ו- $n \geq 1$. תהי $N \triangleleft G$, $N \neq \{1\}$. הוכיחו ש-
 $N \cap Z(G) \neq \{1\}$.

חג שמח לכולם! תנצלו את שאריות הזמן החופשי על מנת לחזור על כל החומר הנלמד עד כה... ☺

בהצלחה!