תרגול 9 – 88-112 אלגברה לינארית 1
סמסטר א' תשע"ו

דצמבר 2015

תרגיל 0.1 (לחימום הקנה). מצאו בסיס ומימד למרחב $\mathbb{C}^2$ מעל:

1. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.
2. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

פתרון.

1. הקבוצה $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ היא הבסיס הסטנדרטי, והמימד הוא 2.
2. פה יש לנו פחות סקלרים בשדה, ולכן צריך להגדיל את הבסיס. נוכיח כי הקבוצה

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$$

היא בסיס של $\mathbb{C}^2$ מעל $\mathbb{R}$.

בת"ל: יהי צירוף לינארי מתאפס

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

עבור $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. לכן

$$\begin{cases} \alpha + \beta i = 0 \\ \gamma + \delta i = 0 \end{cases}$$

כיוון שהפרמטרים ממשיים, נקבל כי $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. לכן B בת"ל.

פורשת: כל וקטור $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ אפשר לכתוב בצורה הבאה:

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta i \\ \gamma + \delta i \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

ולכן B פורשת.

לכן, B בסיס של $\mathbb{C}^2$ מעל $\mathbb{R}$, והמימד הוא 4.

תרגיל 0.2 (סעיף ממבחן תשע"ה מועד א' (אבל משופר)). תהי $B \subseteq V$ תת-קבוצה. הוכיחו כי B בסיס של V אם ורק אם שני התנאים הבאים מתקיימים:

1. $0 \notin B$.
2. לכל $A \subseteq B$ מתקיים $V = \text{Span}\left(A\right) \oplus \text{Span}\left(B \setminus A\right)$.

הוכחה. $\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש-B בסיס. בפרט, B בת"ל, ולכן $0 \notin B$.
כעת, תהי $A \subseteq B$. כדי להוכיח ש-$V = \text{Span}\left(A\right) \oplus \text{Span}\left(B \setminus A\right)$ צריך להוכיח שני דברים:

- $V = \text{Span}\left(A\right) + \text{Span}\left(B \setminus A\right)$: אכן,

$$\text{Span}\left(A\right) + \text{Span}\left(B \setminus A\right) = \text{Span}\left(A \cup \left(B \setminus A\right)\right) = \text{Span}\left(B\right) = V$$

- $\text{Span}\left(A\right) \cap \text{Span}\left(B \setminus A\right) = \{0\}$: יהי $v \in \text{Span}\left(A\right) \cap \text{Span}\left(B \setminus A\right)$. לכן קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ ו-$u_1, \dots, u_k \in A$ שעבורם

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k$$

וגם קיימים $\beta_1, \dots, \beta_\ell \in \mathbb{F}$ ו-$w_1, \dots, w_\ell \in B \setminus A$ שעבורם

$$v = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_\ell w_\ell$$

נשווה בין שתי ההצגות של v שקיבלנו:

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_\ell w_\ell$$

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k - \beta_1 w_1 - \cdots - \beta_\ell w_\ell = 0$$

אבל B בסיס, ובפרט בת"ל, ולכן $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_\ell = 0$. מכאן ש-$v = 0$, כדרוש.

$\boxed{\Rightarrow}$ כעת נניח ש-B מקיימת את תכונות 1 ו-2. בתכונה 2 אפשר לבחור $A = \varnothing$ ולקבל

$$V = \text{Span}\left(\varnothing\right) \oplus \text{Span}\left(B\right) = \{0\} \oplus \text{Span}\left(B\right) = \text{Span}\left(B\right)$$

ומכאן ש-B פורשת את V. נותר להוכיח שהיא בת"ל. יהי צירוף לינארי מתאפס

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

כאשר $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ ו-$v_1, \dots, v_n \in B$. נניח בשלילה שקיים $\alpha_i \neq 0$. לכן

$$v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \cdots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n$$

נסמן $A = \{v_i\} \subseteq B$. לכן $v_i \in \text{Span}\left(A\right)$. אבל $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \in B \setminus A$, ולכן $v_i \in \text{Span}\left(B \setminus A\right)$. לפי הנתון,

$$\text{Span}\left(A\right) \oplus \text{Span}\left(B \setminus A\right) = V$$

ובפרט $\text{Span}\left(A\right) \cap \text{Span}\left(B \setminus A\right) = \{0\}$. לכן, $v_i = 0$, בסתירה לתנאי 1 - שלפיו $0 \notin B$. לכן כל $\alpha_i = 0$, כלומר B בת"ל, ובסך הכל B בסיס של V.

$\square$

1 משפט המימדים

משפט 1.1 (משפט המימדים)**.** יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ממימד סופי, ויהיו $U, W \leq V$. אזי

$$\dim\left(U + W\right) = \dim U + \dim W - \dim\left(U \cap W\right)$$

רעיון ההוכחה. ההוכחה הולכת כך:

1. לוקחים בסיס $\{v_1, \ldots, v_m\}$ של $U \cap W$.
2. משלימים את הבסיס הזה לבסיס של U, נסמנו $\{v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_k\}$.
3. משלימים את הבסיס של החיתוך לבסיס של W, נסמנו $\{v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_\ell\}$.
4. מוכיחים ש-$\{v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_\ell\}$ בסיס של $U + W$, על ידי כך שמראים שהוא בת"ל ופורש.
5. מסיימים, כי

$$\dim\left(U + W\right) = m + k + \ell = (k + m) + (\ell + m) - m = \dim U + \dim W - \dim\left(U \cap W\right)$$

□

תרגיל 1.2 (סעיף ממבחן תשע"ה סמסטר א' מועד א')**.** יהי V מרחב וקטורי ממימד n, ויהיו $U, W \leq V$ שעבורם $\dim U + \dim W > \dim V$. הוכיחו: $U \cap W \neq \{0\}$.

הוכחה. לפי משפט המימדים,

$$\dim\left(U \cap W\right) = \dim U + \dim W - \dim\left(U + W\right) > \dim V - \dim\left(U + W\right) \geq 0$$

לכן $\dim\left(U \cap W\right) > 0$, כלומר $U \cap W \neq \{0\}$. □

תרגיל 1.3. יהי V מרחב וקטורי ממימד 5, ויהיו $U, W \leq V$ תתי-מרחבים עם $\dim U = 3$ ו-$\dim W = 4$. מהן האפשרויות עבור $\dim\left(U \cap W\right)$?

פתרון. אנחנו יודעים כי $U \cap W \subseteq U$, ולכן $\dim\left(U \cap W\right) \leq \dim U = 3$. מצד שני, לפי משפט המימדים,

$$\dim\left(U \cap W\right) = \dim U + \dim W - \dim\left(U + W\right) = 7 - \dim\left(U + W\right)$$

אנו יודעים כי $U + W \subseteq V$, ולכן $\dim\left(U + W\right) \leq \dim V = 5$. מכאן $\dim\left(U \cap W\right) \geq 2$.
לכן, האפשרויות האפשריות היחידות הן 2 ו-3. חפשו דוגמאות לכל אפשרות, כדי לוודא שזה באמת אפשרי.

תרגיל 1.4. יהי V מרחב וקטורי ממימד n, ויהיו $U, W \leq V$ שעבורם $\dim U = n - 1$ ו-$U \nsubseteq W$. הוכיחו כי $U + W = V$.

הוכחה. לפי טענה מהתרגול הקודם, מספיק להוכיח $\dim\left(U+W\right)=\dim V$. לפי משפט המימדים,

$$\dim\left(U+W\right)=\dim U+\dim W-\dim\left(U\cap W\right)=n-1+\dim W-\dim\left(U\cap W\right)$$

כיוון ש-$U\not\supseteq W$, מתקיים $U\cap W\subsetneq W$; לכן,

$$\dim\left(U\cap W\right)<\dim W\Rightarrow\dim W-\dim\left(U\cap W\right)\geq1$$

ביחד עם מה שהוכחנו קודם,

$$\dim\left(U+W\right)=n-1+\dim W-\dim\left(U\cap W\right)\geq n-1+1=n=\dim V$$

ואנחנו יודעים כי $\dim\left(U+W\right)\leq\dim V$; בסך הכל, $\dim\left(U+W\right)=\dim V$, ולכן $U+W=V$. $\square$

תרגיל 1.5 (ממבחן תשס"ה סמסטר קיץ מועד ב'). יהי V מרחב וקטורי ממימד 3, ויהי W תת-מרחב של V. ידוע ש-$B=\{v_1,v_2\}\subseteq V$ בת"ל ומקיימת $B\cap W=\varnothing$. אזי בהכרח:

1. $\dim W=0$.
2. $W\cap\text{Span}\left(B\right)\neq\{0\}$.
3. $\dim W=1$.
4. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

פתרון. קודם כל, אם $W=\{0\}$, אזי התנאים מתקיימים; לכן, טענות 2 ו-3 אינן נכונות.
כעת, צריך לבדוק האם בהכרח $\dim W=\{0\}$, כלומר האם בהכרח $W=\{0\}$. נשלים את B לבסיס $\{v_1,v_2,v\}$ של V, ונגדיר $W=\text{Span}\{v\}$. לכן $B\cap W=\varnothing$, וכן $W\neq\{0\}$. לכן גם טענה 1 אינה נכונה.
מכאן שהתשובה היא 4 - אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

מסקנה 1.6 (הוכחת סכום ישר ממשפט המימדים). נניח שרוצים להראות ש-$V=U\oplus W$. עד היום, היינו צריכים להוכיח שני דברים:

1. $U+W=V$.
2. $U\cap W=\{0\}$.

מהיום, מספיק להוכיח:

1. $\dim U+\dim W=\dim V$.
2. $U\cap W=\{0\}$.

תרגיל 1.7. נגדיר

$$\begin{aligned}U&=\left\{\alpha I\middle|\alpha\in\mathbb{R}\right\}\subseteq\mathbb{R}^{n\times n}\\W&=\left\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}\middle|\text{tr}\left(A\right)=0\right\}\end{aligned}$$

הוכחנו כי עבור $n=2$, $U\oplus W=\mathbb{R}^{2\times2}$. כעת, הוכיחו כי $U\oplus W=\mathbb{R}^{n\times n}$.

הוכחה. ניעזר במסקנה להלן.

1. נחשב את $\dim U$ ואת $\dim W$. קל לראות כי $\{I\}$ בסיס של U, ולכן $\dim U = 1$. כמו כן, $\dim W = n^2 - 1$, לפי הבסיס

$$B = \{E_{ij} | 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\} \cup \{E_{ii} - E_{i+1,i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$$

לכן $\dim U + \dim W = 1 + n^2 - 1 = n^2 = \dim \mathbb{R}^{n \times n}$.

2. נניח כי $A \in U \cap W$. $A \in U$, ולכן קיים $\alpha \in \mathbb{F}$ שעבורו $A = \alpha I$. $A \in W$, ולכן

$$n\alpha = \mathrm{tr}\,(A) = 0$$

מכאן ש-$\alpha = 0$, ולכן $A = 0$.

בסך הכל, נקבל $U \oplus W = \mathbb{R}^{n \times n}$.

□

תרגיל 1.8 (ממבחן תשס"ה סמסטר קיץ מועד ב'). **איזו מבין הטענות הבאות נכונה?**

1. יהיו $V_1, V_2 \subseteq V$ תתי-מרחבים המקיימים $\dim V = 7$, $\dim V_1 = 5$, $\dim V_2 = 4$. אזי $2 \leq \dim (V_1 \cap V_2) \leq 3$.
2. יהיו $U, W \subseteq V$ תתי-מרחבים. אזי $V = U \oplus W \Leftrightarrow \dim U + \dim W = \dim V$.
3. יהיו $V, W \subseteq \mathbb{R}^9$ תתי-מרחבים המקיימים $\dim V = 4$, $\dim W = 5$ וכן $V \nsubseteq W$. אזי $\dim (U \cap W) = 3$.
4. יהיו $V, W \subseteq \mathbb{R}^{11}$ תתי-מרחבים המקיימים $\dim V = 10$, $\dim W = 9$. אזי $\dim (V \cap W) = 8$.

פתרון. נעבור על כל תנאי:

1. לא; אם $V_2 \subseteq V_1$, אזי $V_1 \cap V_2 = V_2$, כלומר $\dim (V_1 \cap V_2) = 4$.
2. לא; אם $V = \mathbb{R}^2$, $U = W = \mathrm{Span}\,\{(1,0)\}$, אזי $\dim U + \dim W = 1 + 1 = 2$, אבל $U + W = U \neq V$.
3. לא; יהי $B = \{v_1, \ldots, v_9\}$ בסיס של $\mathbb{R}^9$. נגדיר $V = \mathrm{Span}\,\{v_1, \ldots, v_4\}$, $W = \mathrm{Span}\,\{v_5, \ldots, v_9\}$. אזי $V \cap W = \{0\}$, ובפרט $V \nsubseteq W$, אבל $\dim (V \cap W) = 0$.
4. לא; אם $W \subseteq V$, נקבל $V \cap W = W$, ואז $\dim (V \cap W) = 9$.