לינארית־תרגיל

1. תזכורת: נאמר ששתי מטריצות A, B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $A = PBP^{-1}$.

א. הוכח: למטריצות דומות יש את אותו $trace$.

ב. הוכח: למטריצות דומות יש את אותה דטרמיננטה.

2. תהי $V = \{v_1, ..., v_n\}$ קבוצה אורתונורמלית של וקטורים ב$\mathbb{R}^n$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית,, וQ מטריצה אורתוגונלית. הוכח $\{Qv_1, ..., Qv_n\}$ גם קבוצה אורתונורמלית.

3. תהי V קבוצה אורתוגנלית כך ש $0 \notin V$, הוכיחו שV בת"ל.

4. א.יהיו A, B מטריצות ריבועיות מאותו גודל. הוכיחו: לAB וBA יש אותם ע"ע.

(הפרידו למקרים של $\lambda = 0$ ו $\lambda \neq 0$).

ב. הוכיחו: לA ולA^t יש אותם ע"ע. (רמז: השתמשו בדטרמיננטה.)

האם לA ול A^t יש אותם וקטורים עצמיים?

5.א. הוכיחו: אם λ ע"ע של A, אז λ^k ע"ע של A^k.

ב. תזכורת: מטריצה A נקראת נלפוטנטית אם קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש $A^k = 0$. הוכיחו: הע"ע היחיד של מטריצה נלפוטנטית הוא 0.

6. תהי $A \in F^{n \times n}$ כך שסכום האיברים בכל שורה של A קבוע. (כלומר, קיים k כך ש: $\forall i, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = k$) הוכיחו ש $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא ו"ע של A.