

פתרון מבחן בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1

מועד ב (08.04.18)

שאלה 1 (24 נקודות – 8 נקודות לכל סעיף)

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. יהי H מספר אינסופי חיובי ויהי $b \in \mathbb{R}$. אזי $H - b$ הוא מספר אינסופי חיובי.

פתרון

הטענה נכונה (זה תרגיל משיעורי הבית):

יהי $r \in \mathbb{R}$ ונוכיח ש- $H - b > r$. מכיון ש- $b \in \mathbb{R}$ נקבל שגם $b + r \in \mathbb{R}$. נתון ש- H הוא מספר אינסופי חיובי ולכן, לפי ההגדרה, מתקיים $H > b + r$. נעביר אגפים ונקבל $H - b > r$ כנדרש.

• ניתן להוכיח את הטענה גם בשלילה.

נניח ש- $H - b$ הוא לא מספר אינסופי חיובי. כלומר, קיים $a \in \mathbb{R}$ כך ש- $H - b \leq a$ (וודאו שאתם מבינים מדוע זו השלילה הנכונה!). לכן $H \leq a + b$ ומכיון ש- $a + b \in \mathbb{R}$ נקבל סתירה לנתון ש- H הוא אינסופי חיובי.

ב. תהיינה f, g שתי פונקציות ממשיות ויהי $c \in \mathbb{R}$. אם הגבולות $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$

לא קיימים, אז הגבול $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x))$ לא קיים.

פתרון

הטענה אינה נכונה (זה תרגיל משיעורי הבית):

ניקח כדוגמה נגדית את הפונקציות $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -\frac{1}{x}$

הגבולות $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ לא קיימים, ולעומת זאת הגבול של הסכום קיים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

ג. תהי f פונקציה ממשית חיובית המוגדרת בכל נקודה ב- \mathbb{R} ויהי $c \in \mathbb{R}$. אם הגבול

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0 \text{ קיים, אז } \lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

[שימו לב: "חיובית" אומר ש- $f(x) > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$].

פתרון

הטענה אינה נכונה:

ניקח לדוגמה את הפונקציה $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$

הפונקציה הנ"ל חיובית ומוגדרת בכל נקודה ב- \mathbb{R} . נתבונן בנקודה $c = 0$. מחד

הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ קיים, ומאידך הוא לא חיובי שכן $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

שאלה 2 (26 נקודות)

I. נתונה פונקציה ממשית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת באמצעות:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan^2 x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

א. (7 נקודות) באילו נקודות f רציפה?

פתרון

לכל $x \neq 0$ הפונקציה רציפה כמכפלה והרכבה של פונקציות רציפות. נבדוק רציפות ב- $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \arctan^2(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) &= \text{st}_{0 \neq \Delta x \approx 0} \left(\arctan^2(\Delta x) \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) \right) \\ &= \text{st}_{0 \neq \Delta x \approx 0} (\text{infinitesimal} \times \text{finite}) = 0 \end{aligned}$$

ומכיוון שמתקיים $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan^2(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 0$ נקבל שהפונקציה

רציפה באפס.

לסיכום: f רציפה ב- \mathbb{R} .

ב. (8 נקודות) מצאו את f' בנקודות שבהן f גזירה.

פתרון

עבור $x \neq 0$ מתקיים: $f'(x) = \frac{2 \arctan x}{1+x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\arctan^2 x}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
נבדוק גזירות בנקודה $x = 0$:

$$f'(0) = \text{st}_{0 \neq \Delta x \approx 0} \left(\frac{\arctan^2 \Delta x \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) - 0}{\Delta x} \right) = \text{st}_{0 \neq \Delta x \approx 0} (\text{infinitesimal} \times \text{finite}) = 0$$

הסבר לכתוב באדום:

$$\text{st}_{0 \neq \Delta x \approx 0} \left(\frac{\arctan^2 \Delta x}{\Delta x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan^2 x}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{Hopital}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x}{1+x^2} = 0$$

לכן f גזירה באפס ומתקיים $f'(0) = 0$.

לסיכום: f גזירה ב- \mathbb{R} .

ג. (6 נקודות) האם f' רציפה בכל $x \in \mathbb{R}$? אם כן – הוכיחו; אם לא – סווגו את נקודות האי-רציפות שלה (סליקה, מין ראשון, מין שני).

פתרון

עד עכשיו ראינו שמתקיים:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2 \arctan x}{1+x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\arctan^2 x}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

לכל $x \neq 0$ הפונקציה f' רציפה כמכפלה, הרכבה והפרש של פונקציות רציפות.

נבדוק רציפות בנקודה $x = 0$.

נחשב את אחד הגבולות החד-צדדיים (ואם הוא קיים, אז נחשב גם את השני). נתבונן בגבול מימין:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 \arctan x}{1+x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\arctan^2 x}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

הגבול הזה לא קיים ולכן **הפונקציה f' לא רציפה באפס, ויש לה שם אי-רציפות ממין שני.**

הסבר לאי-קיום גבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \arctan x}{1+x^2} = 0 \text{ ש-נקבל, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan^2 x}{x^2} = 0 \text{ מכיון ש-}$$

מכיון ש-

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan^2 x}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \arctan x}{2x + 2x^3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{(1+x^2)(2+6x^2)} = 1$$

והגבול $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ לא קיים, נסיק שהגבול $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\arctan^2 x}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)$ לא קיים.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 \arctan x}{1+x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\arctan^2 x}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

ולכן גם הגבול לא קיים, כהפרש של שני גבולות כאשר הראשון קיים והשני לא.

- הערה לפתרון: על מנת לסווג את נקודת אי-הרציפות לא מספיק להוכיח שהגבול $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ לא קיים. שכן הגבול הזה לא קיים גם במצב של מין ראשון וגם במצב של מין שני. לכן, על מנת להבחין בין שני המינים, חייבים לחקור את הגבולות החד-צדדיים!

11. (5 נקודות) חשבו את הגבול הבא, או הוכיחו שאינו קיים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\arctan^2 x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x \right)$$

פתרון

מתקיים: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\arctan^2 x) = \frac{\pi^2}{4}$ וכן

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot -\frac{1}{x^2}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\arctan^2 x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x \right) = \frac{\pi^2}{4} \quad \text{לכן:}$$

שאלה 3 (22 נקודות)

א. (10 נקודות) הוכיחו ש- $e^x \leq ex$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

פתרון

נגדיר פונקציה $f(x) = e^x - ex$ ונוכיח ש- $f(x) \geq 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

נחקור את הפונקציה.

הנגזרת היא $f'(x) = e^x - e$ ולכן $f'(1) = 0$.

x	x < 1	x = 1	x > 1
f'(x)	-	0	+
f(x)	↘	0	↗

ניתן לראות שלפונקציה יש מינימום מקומי יחיד בנקודה $(1,0)$ ולכן זהו מינימום מוחלט. כלומר, לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x) \geq f(1)$ ולכן $f(x) \geq 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$, כנדרש.

ב. (12 נקודות) תהיינה f, g שתי פונקציות ממשיות רציפות ב- $[a, b]$ וגזירות ב- (a, b) ,

עבור $a < b \in \mathbb{R}$. נתון ש- $f(a) = g(a)$ ו- $f'(x) < g'(x)$ לכל $x \in (a, b)$.

הוכיחו ש- $f(b) < g(b)$.

פתרון

דרך א:

נגדיר פונקציה חדשה $h(x) = f(x) - g(x)$. זו פונקציה רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה ב- (a, b) (מדוע?) ולכן מקיימת את תנאי משפט Lagrange.

$$h'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a} \text{ כך ש- } c \in (a, b) \text{ קיימת נקודה}$$

$$h'(c) = \frac{(f(b) - g(b)) - (f(a) - g(a))}{b - a} = \frac{f(b) - g(b)}{b - a} \text{ לפי הנתון:}$$

מכיוון ש- $h'(x) = f'(x) - g'(x) < 0$ לכל $x \in (a, b)$, נקבל ש- $h'(c) < 0$ ולכן

$$\frac{f(b) - g(b)}{b - a} < 0$$

מכאן נקבל ש- $f(b) < g(b)$ כנדרש.

דרך ב:

עבור הפונקציה $h(x) = f(x) - g(x)$ מתקיים:

$h'(x) < 0$ לכל $x \in (a, b)$ ולכן h יורדת בקטע $[a, b]$. לכן מתקיים

$h(a) > h(b)$, כלומר: $0 > f(b) - g(b)$ ומכאן נסיק את הדרוש.

שאלה 4 (14 נקודות)

$$\text{א. (8 נקודות) הוכיחו שהסדרה הבאה היא מונוטונית: } a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

פתרון

$$\text{נגדיר פונקציה } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

מתקיים: $f'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2}$ ולכן לכל $x \geq 1$ מתקיים $f(x) \leq 0$. מכאן, לפי

משפט המונוטוניות, הפונקציה יורדת בתחום $[1, \infty)$.

לכן לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $f(n) > f(n+1)$, כלומר $a_n > a_{n+1}$ ולכן הסדרה היא מונוטונית יורדת.

ב. (6 נקודות) מצאו את הגבול הבא אם קיים, ואחרת הוכיחו שאינו קיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + 6}{(n+1)! + 8}$$

פתרון

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + 6}{(n+1)! + 8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{6}{n!}}{(n+1) + \frac{8}{n!}} = 0$$

שאלה 5 (14 נקודות - 7 נקודות לכל סעיף)

קבעו לגבי כל טור אם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

$$\text{א. } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n+1}$$

פתרון

זהו טור חיובי וניעזר במבחן ההשוואה.

ראינו שהסדרה $\ln(n)$ היא מונוטונית עולה. מכיון ש- $\ln e = 1$, נסיק שלכל $n \geq 3$ מתקיים $\ln n > 1$.

$$\text{לכן לכל } n \geq 3: \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n+1} < \frac{\ln n}{n+1}$$

$$\text{הטור } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ מתבדר ולכן גם הטור } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n+1} \text{ מתבדר.}$$

• אפשר גם באמצעות מבחן העיבוי. נסו זאת!

$$\text{ב. } \sum_{n=15}^{\infty} \frac{n}{(-2)^{n-1}}$$

פתרון

נבדוק תחילה התכנסות בהחלט:

$$\sum_{n=15}^{\infty} \left| \frac{n}{(-2)^{n-1}} \right| = \sum_{n=15}^{\infty} \left| \frac{n}{(-1)^{n-1} 2^{n-1}} \right| = \sum_{n=15}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$$

נשתמש במבחן המנה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{2^{n-1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

$$\text{לכן הטור } \sum_{n=15}^{\infty} \frac{n}{(-2)^{n-1}} \text{ מתכנס בהחלט.}$$

• אפשר גם באמצעות מבחן השורש. נסו זאת!

שאלת בונוס (10 נקודות)

תהי f פונקציה גזירה ב- \mathbb{R} ונניח ש- f' רציפה ב- \mathbb{R} . יהיו $a < b \in \mathbb{R}$ ונניח ש-
 $f(a) = f(b)$ וגם $f'(a) = f'(b)$.

הוכיחו שקיימים $x_1, x_2 \in (a, b)$ כך ש- $x_1 \neq x_2$ וגם $f'(x_1) = f'(x_2)$.

פתרון

נגדיר פונקציה חדשה $h(x) = f'(x) - f'(a)$. זו פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ ומקימת
 $h(a) = f'(a) - f'(a) = 0$, $h(b) = f'(b) - f'(a) = 0$

אם $h(x) = 0$ לכל $x \in [a, b]$ אז סיימנו, שכן אז $f'(x) = f'(a)$ לכל $x \in [a, b]$ ובפרט
קיימות שתי נקודות שונות $x_1, x_2 \in (a, b)$ שעבורן $f'(x_1) = f'(x_2)$.

אחרת, קיימת נקודה $c \in (a, b)$ שעבורה $h(c) \neq 0$.

נשתמש (פעמיים) במשפט ערך הביניים.

1. h רציפה בקטע $[a, c]$ ולכן מקבלת את כל הערכים בין 0 ל- $h(c)$.

בפרט קיימת נקודה $x_1 \in (a, c)$ שעבורה $h(x_1) = \frac{h(c)}{2}$, כלומר:

$$f'(x_1) = \frac{h(c)}{2} + f'(a)$$

2. h רציפה בקטע $[c, b]$ ולכן מקבלת את כל הערכים בין 0 ל- $h(c)$.

בפרט קיימת נקודה $x_2 \in (c, b)$ שעבורה $h(x_2) = \frac{h(c)}{2}$, כלומר:

$$f'(x_2) = \frac{h(c)}{2} + f'(a)$$

מכיוון ש- $x_1 \in (a, c)$ ו- $x_2 \in (c, b)$, נקבל ש- $x_1 \neq x_2$ וכן $f'(x_1) = f'(x_2)$, כנדרש!

בהצלחה בהמשך השנה!