מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 2

1. (מהארצאה 2) יהי M מרחב מטרי, x_n סדרת איבריו ו- $a \in M$.
<u>הוכיחו</u> ש- $x_n \to a$ אם"ם לכל סביבה U של a כל אברי הסדרה פרט למספר סופי שלהם מוכלים ב-U .

2. <u>הגדרה.</u> הפונקציה $D: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך ש- $D = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, נקראת <u>*פרנקצחה דיריכלה*</u> . ($\mathbb{Q}$-קבוצת מספרים רציונאליים)
<u>הוכיחו</u> שפונקציה דירכלה אינה רציפכ בכל נקודה.

3. יהיו A, B מרחבים מטריים.<u>הוכיחו</u> שהפונקציה $f: A \to B$ רציפה אם ורק אם הקבוצה $f^{-1}(F)$ סגורה לכל קבוצה סגורה $F \subseteq B$.

4. <u>תזכורת.</u> מרחב מטרי נקרא "שלם" אם כל סדרת קושי במרחב הזה מתכנסת.
יהיה M מרחב מטרי שלם ותהי $F \subseteq M$ קבוצה סגורה.
<u>הוכיחו</u> שתת מרכב F הוא מרחב מטרי שלם.

5. (מהארצאה 2) <u>הוכיחו</u> ש- הקבוצות

$$U_1 = (0,1) - \{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots\}$$

$$U_2 = (0,1) - \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\}$$

פתוחות ב- $(0,1)$.