תרגיל 5 – עוצמות

לאורך תרגיל זה, על מנת להשוות עוצמות יש למצוא פונקציות בהתאם להגדרה ולא להשתמש במשפטי אריתמטיקה

1. הוכח/הפרך: אוסף כל המילים האפשריות (צירוף סופי כלשהו של אותיות בעברית) הינו בן מנייה.

פתרון:

נזכיר כי מציאת פונקציה חח"ע ועל מהטבעיים לקבוצה כלשהי שקולה לסידור הקבוצה בשורה. קבוצת המילים מאורך סופי k היא סופית, וניתן לסדר אותה אלפבתית. לכן נסדר קודם את המילים מאורך אחד, לאחר מכן את המילים מאורך 2, וכדומה. ניתן כך לקבוע לכל מילה את המיקום שלה בסדרה באופן יחיד ע"י סידור כל המילים עד אליה.

דרך נוספת לחשוב על זה: תדמיינו כי האותיות שלכם הן הספרות העשרוניות. האם אוסף כל ה"מילים" הוא בן מנייה? כמובן, זה בדיוק אוסף הטבעיים.

2. הוכח שלא קיימת פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ קיים $0<\varepsilon_x\in\mathbb{R}$ כך שלכל $y>x$ מתקיים $f(y)-f(x)>\varepsilon_x$. (תזכורת: בין כל שני ממשיים יש מספר רציונאלי.)

הוכחה:

נניח בשלילה שקיימת פונקציה כזו. אזי, לכל $x\in\mathbb{R}$ קיימת סביבה $A_x=(f(x),f(x)+\varepsilon_x)$ כך שמתקיים $A_x\cap A_y=\phi$ לכל $x\neq y$. נוכיח זאת:

ב.ה.כ. $x>y$ ולכן $f(y)>f(x)+\varepsilon_x$ והרי $A_x=(f(x),f(x)+\varepsilon_x),A_y=(f(y),f(y)+\varepsilon_y)$ וקל לראות שקטע אחד מתחיל אחרי שהשני נגמר.

נעזר באקסיומת הבחירה ונגדיר פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Q}$ השולחת כל x למספר רציונאלי המוכל ב A_x לפי הבנייה שלנו, הפונקציה הזו הינה חח"ע (אחרת זו סתירה לחיתוך הזר בין הקטעים).

לכן מצאנו פונקציה חח"ע מהממשיים לרציונאליים בסתירה לכך שעוצמת הממשיים גדולה ממש מזו של הרציונאליים.

3. תהי A קבוצה אינסופית הוכח שקיימת לה תת קבוצה אמיתית $A,B\subseteq A$ $B\neq$ כך ש $|A|=|B|$

הוכחה:

A אינסופית, לכן היא מכילה קבוצה בת מנייה C. מכיוון ש C **בת מנייה** (אך ורק מהסיבה הזו) ניתן לסמן $C=\{c_1,c_2,\ldots\}$. נוכיח שהקבוצה $B=A\setminus\{c_1\}$ מקיימת את הדרוש, ע"י מציאת פונקציה חח"ע ועל בינהן:

נגדיר $f:B\to A$ ע"י $f(a):=\begin{cases} a & a\notin C \\ c_{n-1} & a=c_n \end{cases}$. קל לוודא שפונקציה זו אכן חח"ע ועל.

4. תהי A בת מנייה, הוכח כי $A\times A$ בת מנייה (מותר להניח את הטענה שהוכחנו בשיעור כי $|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|$).

פתרון:

קיימת פונקציה חח"ע ועל $f:\mathbb{N}\to A$. אזי הפונקציה $h:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to A\times A$ המוגדרת ע"י $h(a,b):=(f(a),f(b))$ הינה חח"ע ועל ומוכיחה את מה שצריך.

5. תהי A מעוצמת $\aleph$ ותהי B כלשהי מעוצמת $\aleph_0$. הוכח ש $|A\setminus B|=\aleph$ (רמז: בטוח יש ב A עוד איזה קבוצה בת מנייה איפשהו.)

הוכחה:

ראשית, נבחין כי $A\setminus B$ אינסופית. אחרת נקבל כי A הינה קבוצה בת מנייה ועוד מספר סופי של איברים, וזה כמובן נשאר בן מנייה בסתירה.

$A\setminus B$ אינסופית, לכן היא מכילה קבוצה בת מנייה C. מכיוון ש C **בת מנייה** (אך ורק מהסיבה הזו) ניתן לסמן $C=\{c_1,c_2,...\}$. נסמן ב $D=A\cap B=\{d_1,d_2,...\}$.

נבנה פונקציה $f:A\setminus B\to A$ המוגדרת על ידי
$$f(a):=\begin{cases} a & a\notin C\\ d_n & a=c_{2n}\\ c_n & a=c_{2n+1}\end{cases}$$

קל לראות שפונקציה זו חח"ע ועל ולכן משל.

הערה: שימו לב שייתכן כי D הינה סופית ואף ריקה ולכן הפונקציה הנ"ל לא תהא מוגדרת היטב. במקרה זה נשלח את האיברים הראשונים של C לאברי D ואת השאר נשלח לכל איברי C:

$$f(a):=\begin{cases} a & a\notin C\\ d_n & a=c_n, n\le k\\ c_n & a=c_{n+k}\end{cases}$$ כאשר $k=|D|$.

6. הוכח ש $|[0,1]|=|(0,1]|$

הוכחה:

במערכי התרגול באתר.