תרגיל 6:

פתרונות לשאלות מהמבחנים נמצאים, לא במפתיע, בפתרונות המבחנים.

1. (מועד ב' 2009) תהי X קבוצה לא ריקה, ויהי R יחס שקילות על X. **חתך** S של היחס R הינו תת קבוצה של X כך שלכל $x \in X$ הקבוצה $S \cap [x]_R$ מכילה איבר אחד בדיוק.
   א. הוכיח שלכל יחס שקילות על קבוצה לא ריקה קיים חתך. (רמז: הביטו באוסף הקבוצות $T = \{A \subseteq X \mid \forall x \in X : |A \cap [x]_R| \le 1\}$)
   ב. נניח כי $|X| \ge \aleph_0$, ותהי $b < a$ עוצמה כך שלכל $x \in X$ מתקיים $|[x]_R| \le b$. הוכיחו כי $|S| = a$
2. (מועד א' 2009) תהיינה A, B קבוצות כך ש B אינסופית. נסמן $|A| = a, |B| = b$ ונניח ש $1 < a \le b$

   א. הוכיחו שקיימת תת קבוצה $C \subseteq B$ כך ש $|C| = |A|$
   ב. מצאו את $|A \cup B|$, נמקו.
   ג. נגדיר $D = \{ f \mid f : B \to A\}$, הוכיחו כי $|D| = 2^b$
   ד. הוכיחו כי $\left|\bigcup_{x \in A} B \times \{x\}\right| = b$
   ה. מצאו את עוצמת $P(B \times A) \times B \times \mathbb{N}$. נמקו.
3. (מועד ב' 2008) תהי A קבוצה כלשי של מספרים ממשיים ויהי $a \in A$. a נקרא **חוצץ** אם קיימת פונקציה חח"ע ועל מהקבוצה $\{b \in A \mid b < a\}$ אל הקבוצה $\{b \in A \mid b > a\}$
   א. מצא את עוצמת קבוצת החוצצים של A אם נתון שהיא אינסופית ומוכלת בטבעיים.
   ב. יהיו מספרים ממשיים $c < d$. מהי קבוצת החוצצים של $A = \{x \mid c < x < d\}$?
   ג. תהי A קבוצה סופית, מהי עוצמת קבוצת החוצצים שלה? (הפרד בין שני מקרים).
   ד. אם A מוכלת בקבוצת השלמים ומספר החוצצים שלה גדול מ-1, מהי עוצמת קבוצת החוצצים שלה?
4. (שאלה ממבחן 2010) תהי A קבוצה אינסופית. לכל $k \in \mathbb{N}$ נגדיר
   $$M_k = \{B \subseteq A : |B| = k\}$$
   א. הוכיחו ש $|M_1| = |A|$
   ב. יהי $2 \le k \in \mathbb{N}$ הוכיחו כי $|M_1| \le |M_k|$ (רמז: בחרו $x_1, ..., x_{k-1} \in A$ שונים ומצאו פונקציה חח"ע $f : M_1 \setminus \{\{x_1\}, ..., \{x_{k-1}\}\} \to M_k$. מה הקשר בין $|M_1|$ ו- $|M_1 \setminus \{\{x_1\}, ..., \{x_{k-1}\}\}|$?
   ג. יהי $2 \le k \in \mathbb{N}$ הוכיחו כי $|M_k| \le |A^k|$
   ד. מצאו את עוצמת כל תת הקבוצות הסופיות של A.
   ה. מצאו את עוצמת כל תת הקבוצות האינסופיות של A.

5. נביט באוסף המספרים השלמים. נגדיר את $R \subseteq \mathbb{Z}$ להיות אידיאל אם $R \neq \mathbb{Z}$, $R \neq \phi$ $\forall p \in \mathbb{Z} \forall r \in R : pr \in R$ והסכום וההפרש של כל שני איברים מ R שייך ל R.
(זו לא ההגדרה המדויקת של אידיאל, אבל זה מספיק לתרגיל).

<u>הוכח</u> כי קיים אידיאל R כך שאם $R \subset S$, S אינו אידיאל.

הוכחה:

תהי X קבוצת כל האידיאלים, מוגדר עליה יחס סדר חלקי – הכלה. תהי $S \subseteq X$ שרשרת. נוכיח כי האיחוד הכללי על S, נסמנו U_S, הינו אידיאל. כלומר, נוכיח כי $U_S \in X$. ברור ש U_S חסם מלעיל של S ביחס להכלה, כיוון שהוא מכיל את כל האיברים ב S. אז מתקיימים תנאי הלמה של צורן, וקיים ב X איבר מקסימלי ביחס להכלה – הוא אידיאל שאף אידיאל אחר אינו מכיל אותו, כפי שנדרש.

נוכיח אם כן ש $U_S \in X$. מכיוון שכל האידיאלים אינם שווים ל $\mathbb{Z}$, לא ייתכן כי הם מכילים את אחד (אחרת כל מספר שלם כפול אחד שייך אליהם, ולכן כל השלמים שייכים אליהם בסתירה).

לכן אחד אינו שייך גם לאיחוד הכללי, ולכן $U_S \neq \mathbb{Z}$.

על מנת להוכיח כי $U_S \neq \phi$ יש להוכיח ש**קיים אידיאל כלשהו**. אחרת, היינו יכולים להמציא הגדרה כלשהי ולהוכיח שקיימת קבוצה מקסימלית המקיימת את ההגדרה, מבלי שאפילו קבוצה אחת תקיים אותה. במקרה זה, קבוצת הזוגיים מהווה אידיאל.

כעת, יהיו $r,t \in U_S$ לכן קיימים אידיאלים $S_r, S_t \in S$ כך ש $r \in S_r, t \in S_t$ (זה מהגדרת האיחוד הכללי). <u>כעת, אנו משתמשים בעובדה ש S שרשרת. ללא עובדה זו, ההוכחה הייתה שגויה (ומקבלת אפס נקודות במבחן)</u>.מכיוון ש S שרשרת, מתקיים ב.ה.כ כי $S_t \subseteq S_r$ ולכן $t, r \in S_r$. ולכן $\forall p \in \mathbb{Z} : r+t, r-t, pr, pt \in S_r$ ולכן איברים אלה שייכים גם לאיחוד הכללי, ולכן האיחוד הכללי הוא אכן אידיאל וסיימנו.