הרצאה 4

היחס המושרה ע"י החלוקה

יהי $\{A_i : i\in I\}$ חלוקה של A, אזי $R=\bigcup_{i\in I}(A_i\times A_i)$ הוא יחס שקילות על A. קוראים לו **היחס המושרה** ע"י החלוקה.

הוכחה

רפלקסיביות – יהי $a\in A$ מכיוון ש $\{A_i : i\in I\}$ חלוקה של A מתקיים $\bigcup_{i\in I}A_i=A$ ז"א $a\in\bigcup_{i\in I}A_i$ ולכן קיים $i\in I$ כך ש $a\in A_i$ מכיוון ש $R=\bigcup_{i\in I}(A_i\times A_i)$ נקבל ש $(a,a)\in R$.

סימטריות – יהי $(a,b)\in R$ מכיוון ש $R=\bigcup_{i\in I}(A_i\times A_i)$ אז $(a,b)\in\bigcup_{i\in I}(A_i\times A_i)$ ז"א קיים $i\in I$ כך ש $a\in A_i\wedge b\in A_i$ ולכן $(b,a)\in A_i\times A_i$ ומכיוון ש $R=\bigcup_{i\in I}(A_i\times A_i)$ נקבל ש $(b,a)\in R$.

טרנזיטיביות – נניח ש $(a,b)\in R\wedge(b,c)\in R$ מכיוון ש $(a,b)\in R$ ו $R=\bigcup_{i\in I}(A_i\times A_i)$ קיים $i\in I$ כך ש $a\in A_i\wedge b\in A_i$. מכיוון ש $(b,c)\in R$ קיים $j\in I$ כך ש $b\in A_j\wedge c\in A_j$. קיבלנו ש $A_i\cap A_j\neq\phi\Leftarrow b\in A_i\cap A_j$ מכיוון ש $\{A_i : i\in I\}$ חלוקה של A נקבל ש $i=j$.

סה"כ קיבלנו שקיים $i\in I$ כך ש $a\in A_i\wedge c\in A_i$ ולכן קיים $i\in I$ כך ש $(a,c)\in A_i\times A_i$ ומכיוון ש $R=\bigcup_{i\in I}(A_i\times A_i)$ נקבל ש $(a,c)\in R$.

מסקנה

קיימת התאמה בין החלוקות של A לבין יחסי השקילות על A.

דוגמה

לכל $i\in\mathbb{Z}$ תהי $A_i=\{x\in\mathbb{R} : i\le x<i+1\}$. האוסף $\{A_i : i\in\mathbb{Z}\}$ הוא חלוקה של הממשיים. היחס המושרה הוא $\lfloor x\rfloor=\lfloor y\rfloor$ שפירושו, החלק השלם של x מלמטה שווה לחלק השלם של y מלמטה.

קבוצת המנה

עבור יחס שקילות R נגדיר את קבוצת המנה כקבוצת כל מחלקות השקילות. $A/R=\{[a]_R \mid a\in A\}$.

דוגמאות

1. יהיו $a,b\in\mathbb{Z}$ ויהי m מספר טבעי הגדול מ 1 אז $a=b(\operatorname{mod} m)$ אם ורק אם קיים מספר $k\in\mathbb{Z}$ כך ש $a=b+k\cdot m$.

יחס השקילות מודולו $a,b\in\mathbb{Z}$ הוא היחס הבא: $R_m=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{Z}\wedge a=b(\operatorname{mod} m)\}$.

מחלקות השקילות של R_3 הם:

$$[0]_{R_3}=\{\dots,-6,-3,0,3,6,0\dots\}$$

$$[1]_{R_3}=\{\dots-5,-2,1,4,3,0\dots\}$$

$$[2]_{R_3}=\{\dots,-4,-1,2,5,\dots\}$$

נרשום את קבוצת כל מחלקות השקילות ונקבל את קבוצת המנה: $\mathbb{Z}_3=\{[0]_{R_3},[1]_{R_3},[2]_{R_3}\}$.

2. תהיי $A\neq\phi$. ליחס המלא יש רק מחלקת שקילות אחת והיא A.
3. תהיי $A\neq\phi$. ליחס הזהות, מחלקות השקילות הן כל הקבוצות מהצורה $\{a\}$, כאשר $a\in A$.

4. נגדיר יחס R על $\mathbb{C}$ באופן הבא: $(z_1,z_2)\in R \Leftrightarrow |z_1|=|z_2|$. R הוא יחס שקילות.
$[z_1]_R=\{z\in\mathbb{C}:|z|=|z_1|\}$. המשמעות הגיאומטרית – מעגל שרדיוסו $|z_1|$. שימו לב:
$\mathbb{C}/R=\{x\in\mathbb{R}|0\le x\}$.

<u>מטרה – הגדרת סדר בקבוצה.</u>

<u>דוגמה</u>

נתבונן בקבוצה $A=\{1,2,3,4,5\}$.
מיהו האיבר הראשון בקבוצה?
לפי מה שלמדנו עד עכשיו האיבר הראשון בקבוצה הוא 1.
ישנם מקרים שהסדר משתנה.
למשל: נניח שהמספרים בקבוצה מציינים את מספר הניצחונות בתחרות טניס.
במקרה כזה 5 יציין את המקום הראשון והוא יהיה האיבר הראשון.
אנחנו שמים לב שיש צורך להגדיר את סדר האיברים בקבוצה, מכיוון שהסדר יכול להשתנות לפי ההקשר.

במהלך ההרצאה R הוא יחס על קבוצה A אלא אם כן נאמר אחרת.

<u>יחס אנטי-סימטרי</u>

נאמר ש R יחס אנטי סימטרי אם $a=b \Leftarrow (a,b)\in R\wedge(b,a)\in R$

<u>דוגמה</u>

1. $A=\{1,2,3,4\}$ היחס $R=\{(1,2),(2,3)\}$ הוא אי - רפלקסיבי.
2. $A=\{1,2,3,4\}$ היחס $R=\{(1,1),(2,3)\}$ הוא לא אי – רפלקסיבי.

<u>יחס משווה</u>

נאמר ש R הוא יחס משווה אם לכל $a,b\in A$ מתקיים אחד מהמקרים הבאים:

i. $(a,b)\in R$.
ii. $(b,a)\in R$.
iii. $a=b$.

<u>דוגמה</u>

1. $A=\{1,2,3,4\}$ היחס $R=\{(1,2),(2,3)\}$ לא משווה מכיוון ש $(1,4)\notin R\wedge(4,1)\notin R$.
2. $A=\{1,2,3,4\}$ היחס $R=\{(1,2),(2,3),(3,4),(1,4),(3,1),(2,4)\}$ הוא יחס משווה.

<u>יחס סדר חלקי</u>

יהי R יחס מעל $A\neq\phi$. נאמר ש R יחס סדר חלקי אם הוא:

i. טרנזיטיבי.
ii. רפלקסיבי.
iii. אנטי סימטרי.

<u>דוגמאות</u>

1. תהיי $A=\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה של קבוצות. נגדיר את היחס מעל A ע"י $A_i\subseteq A_j \Leftrightarrow (A_i,A_j)\in R$.
נקבל יחס סדר חלקי.
i. $A=\{A_i\}_{i\in I}$ כאשר $A_1=\{1,2,3\},A_2=\{2,3,4\},A_3=\{2\},A_4=\{4\}$ ואז
$R=\{(A_1,A_1),(A_2,A_2),(A_3,A_3),(A_4,A_4),(A_3,A_2),(A_3,A_1),(A_4,A_2)\}$. שימו לב
שאין יחס בין A_3,A_4.

ii. $A=\{A_i\}_{i\in I}$ כאשר $A_1=\{1,2,3,4\}, A_2=\{2,3,4\}, A_3=\{2\}$.
$R=\{(A_1,A_1),(A_2,A_2),(A_3,A_3),(A_3,A_1),(A_3,A_2),(A_2,A_1)\}$.

2. דוגמה ליחס שהוא **לא** סדר חלקי. יחס מעל $\mathbb{C}$ המוגדר באופן הבא: $(z_1,z_2)\in R \Leftrightarrow |z_1|\le|z_2|$ היחס לא אנטי סימטרי מכיוון ש $(1+2i,2+i)\in R\wedge(2+i,1+2i)\in R$ אבל $1+2i\ne 2+i$.

יחס סדר מלא

יחס סדר חלקי R מעל A יחס סדר מלא אם הוא משווה.

דוגמאות

1. היחס $\le$ על $\mathbb{N}$ הוא יחס סדר מלא.
2. תהיי $A=\{2^n \mid n\in\mathbb{N}\}$ ונגדיר את יחס באופן הבא:

$R=\{(a,b)\in A\times A:\ a \text{ מחלק את } b\}$.

R הוא יחס סדר מלא –

i. טרנזיטיבי – אם $(a,b)\in R\wedge(b,c)\in R$ אז a מחלק את b וגם b מחלק את c מכיוון ש a מחלק את b קיים מספר שלם k כך ש $b=k\cdot a$ ומכיוון ש b מחלק את c קיים מספר שלם l כך ש $c=l\cdot b$ ולכן $c=(l\cdot k)\cdot a$ ולכן a מחלק את c ז"א $(a,c)\in R$.

ii. רפלקסיבי – מכיוון שלכל $a\in A$ a מחלק את עצמו.

iii. אנטי סימטרי– מכיוון שאם a מחלק את b ו b מחלק את a אז $a=b$.

iv. משווה – אם $a\in A$ אז קיים מספר טבעי n כך ש $a=2^n$, אם $b\in A$ קיים מספר טבעי m כך ש $b=2^m$.

a. אם $n>m$ אז $a=2^{n-m}\cdot b$ ואז $(b,a)\in R$.

b. אם $m>n$ אז $b=2^{m-n}\cdot a$ ואז $(a,b)\in R$.

c. אם $m=n$ אז $a=b$.

הערה

אם נגדיר את היחס $R=\{(a,b)\in A\times A: a \text{ מחלק את } b \text{ ושונה נמנו}\}$ כאשר $A=\mathbb{N}$ אז R לא יהיה יחס משווה מכיוון ש $2\ne 3\wedge(2,3)\notin R\wedge(3,2)\notin R$ ואז היחס הוא יחס סדר חלקי.

נשים לב שבמקרה הנ"ל כן ניתן לסדר את האיברים – נמחיש זאת באמצעות דיאגראמת Hasse.