אינפי 3 תרגיל 5 לתיכוניסטים - פתרונות

1. $f(x,y,z)=xy^2z^3$ וברור ש f דיפרנציאבילית כי נגזרותיה החלקיות רציפות. לכן נשתמש בנוסחא שמערבת גרדיאנט. חישוב פשוט מראה ש

$$\nabla f(x,y,z)=(y^2z^3,2xyz^3,3xy^2z^2)$$

ולכן

$$\nabla f(3,2,1)=(4,12,36)$$

הנגזרת הכיוונית בכיוון h היא

$$\frac{\partial f}{\partial h}=\frac{1}{||h||}\nabla f(3,2,1)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}=\frac{1}{||h||}(4,12,36)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}=\frac{4h_1+12h_2+36h_3}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}$$

2. נשים לב ש

$$1=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,t)-f(t,-t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,t)-f(0,0)+f(0,0)-f(t,-t)}{t}=$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t}-\lim_{t\to 0}\frac{f(t,-t)-f(0,0)}{t}=D_{(1,1)}f(0,0)-D_{(1,-1)}f(0,0)$$

בגלל ש f דיפרנציאבילית ב $(0,0)$ אנו יודעים כי

$$D_{(1,1)}f(0,0)=(f_x(0,0),f_y(0,0))\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=f_x(0,0)+f_y(0,0)$$

$$D_{(1,-1)}f(0,0)=(f_x(0,0),f_y(0,0))\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=f_x(0,0)-f_y(0,0)$$

ולכן

$$1=D_{(1,1)}f(0,0)-D_{(1,-1)}f(0,0)=2f_y(0,0)$$

כלומר

$$f_y(0,0)=\frac{1}{2}$$

3.

(א) נתחיל בהוכחה ש $h(x,y)$ דיפרנציאבילית ב $(0,0)$ אם התנאים המפורטים מתקיימים. נתחיל במקרה ש $g(x,y)=(0,0)$. f דיפרנציאבילית ב $(0,0)$ ולכן לפי הגדרה

$$f(t_1,t_2)=f(0,0)+f_x^{'}(0,0)t_1+f_y^{'}(0,0)t_2+\epsilon(t)||t||$$

ומתקיים $\epsilon(t) \xrightarrow{t\to 0} 0$ (אני משתמש ב t כי הסימון h תפוס כבר). לפי הנתונים

$$f(0,0) = f_x^{'}(0,0) = f_y^{'}(0,0) = 0$$

זה בעצם אומר ש

$$f(t_1, t_2) = \epsilon(t)||t||$$

כלומר

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t_1,t_2)}{||h||} = 0$$

נשים לב שלפי הגדרת $h(x,y)$

$$h(0,0) = 0$$

$$h_x^{'}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(t,0) - h(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$$h_y^{'}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(0,t) - h(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

נבדוק אם $h(x,y)$ דיפרנציאבילית ב $(0,0)$ לפי הגדרה

$$h(t_1,t_2) = h(0,0) + h_x^{'}(0,0)t_1 + h_y^{'}(0,0)t_2 + \epsilon(t)||t||$$

$$h(t_1,t_2) = \epsilon(t)||t||$$

$$\epsilon(t) = \frac{h(t_1,t_2)}{||t||}$$

נשים לב שלפי הגדרת h, מתקיים כי $h(t_1,t_2) = f(t_1,t_2)$ או $h(t_1,t_2) = 0$.
לכן בכל מקרה $|h(t_1,t_2)| \le |f(t_1,t_2)|$, ולכן

$$|\frac{h(t_1,t_2)}{||t||}| \le |\frac{f(t_1,t_2)}{||t||}| \xrightarrow{(t_1,t_2)\to(0,0)} 0$$

לכן h דיפרנציאבילית ב $(0,0)$. נעבור למקרה הכללי שבו $g(x,y)$ לא בהכרח 0. נגדיר $T(x,y) = h(x,y) - g(x,y)$ ו $S(x,y) = f(x,y) - g(x,y)$ נשים לב ש S דיפרנציאבילית ב$(0,0)$ כי היא הפרש של שתי פונקציות שדיפרנציאביליות ב $(0,0)$ ובנוסף

$$S(0,0) = 0 \quad S_x^{'}(0,0) = 0 \quad S_y^{'}(0,0) = 0$$

כמו כן,

$$T(x,y) = \begin{cases} S(x,y) & xy > 0 \\ 0 & xy \le 0 \end{cases}$$

לפי מה שהוכחנו קודם, T דיפרנציאבילית ב $(0,0)$. ולכן גם $h(x,y)$ דיפרנציאבילית ב $(0,0)$ בתור סכום של דיפרנציאביליות ב $(0,0)$. $(h(x,y) = T(x,y) + g(x,y))$.

(ב) נניח ש $h(x,y)$ דיפרנציאבילית ב$(0,0)$, בפרט $h(x,y)$ צריכה להיות רציפה ב $(0,0)$ ולכן

$$\lim_{x\to 0} h(x,x) = h(0,0)$$

אבל

$$\lim_{x\to 0} h(x,x) = \lim_{x\to 0} f(x,x) = f(0,0)$$

ו

$$h(0,0) = g(0,0)$$

ולכן $g(0,0) = f(0,0)$. כעת, בגלל ש $h(x,y)$ דיפרנציאבילית אנחנו יודעים שלכל וקטור מנורמל $u \in \mathbb{R}^2$ מתקיים כי

$$\frac{\partial h}{\partial u}(0,0) = \nabla h(0,0) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (h_x^{'}(0,0), h_y^{'}(0,0)) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

קל לראות לפי הגדרת $h(x,y)$ ש

$$h_x^{'}(0,0) = g_x^{'}(0,0), \quad h_y^{'}(0,0) = g_y^{'}(0,0)$$

ולכן הביטוי הקודם שווה ל

$$(g_x^{'}(0,0), g_y^{'}(0,0)) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = g_x^{'}(0,0)u_1 + g_y^{'}(0,0)u_2$$

כלומר

$$\frac{\partial h}{\partial u}(0,0) = g_x^{'}(0,0)u_1 + g_y^{'}(0,0)u_2$$

מצד שני, אם $u = (u_1, u_2)$ הוא וקטור כך ש $u_1 u_2 > 0$ מתקיים כי

$$\frac{\partial h}{\partial u}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(tu) - h(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(tu) - f(0,0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$$

ובגלל ש f דיפרנציאבילית ב $(0,0)$ מתקיים כי

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = f_x^{'}(0,0)u_1 + f_y^{'}(0,0)u_2$$

לכן קיבלנו כי לכל $u = (u_1, u_2)$ כך ש $u_1 u_2 > 0$ מתקיים כי

$$f_x^{'}(0,0)u_1 + f_y^{'}(0,0)u_2 = \frac{\partial h}{\partial u}(0,0) = g_x^{'}(0,0)u_1 + g_y^{'}(0,0)u_2$$

כלומר לכל $u = (u_1, u_2)$ כך ש $u_1 u_2 > 0$ מתקיים כי

$$(f_x^{'}(0,0) - g_x^{'}(0,0))u_1 + (f_y^{'}(0,0) - g_y^{'}(0,0))u_2 = 0$$

וזה מחייב

$$f_x^{'}(0,0) = g_x^{'}(0,0) \quad f_y^{'}(0,0) = g_y^{'}(0,0)$$

כנדרש.

4. אנו יודעים שהכדור יתחיל לזוז לכיוון ההפוך לכיוון הגרדיאנט. היות ו

$$z = e^{-x^2-2y^2}$$

הגרדיאנט בנקודה (x_0, y_0) הוא

$$\nabla f(x_0, y_0) = (-2x_0 e^{-x_0^2-2y_0^2}, -4y_0 e^{-x_0^2-2y_0^2})$$

לכן הכדור יזוז לכיוון הנגדי כלומר:

$$(2x_0 e^{-x_0^2-2y_0^2}, 4y_0 e^{-x_0^2-2y_0^2})$$

אנו צריכים שכיוון זה יהיה בכיוון הוקטור $(2,1)$ וזה למשל קורה כאשר $x_0 = 4, \quad y_0 = 1$ (זה יקרה בשביל כל נקודה (x_0, y_0) שבה $x_0 = 4y_0$). רכיב z של נקודה זו הוא:

$$z = e^{-16-2} = e^{-18}$$

לכן נקודה מתאימה על המשטח תהיה

$$(4, 1, e^{-18})$$

או כל נקודה מהצורה:

$$(4t, t, e^{-18t^2})$$

נותר לברר לאיזה כיוון ב $\mathbb{R}^3$ הכדור יפנה. הגרדיאנט של המשטח $e^{-x^2-2y^2} - z$ הוא

$$(-2x_0 e^{-x_0^2-2y_0^2}, -4y_0 e^{-x_0^2-2y_0^2}, -1)$$

ובנקודה $(4t, t, e^{-18t^2})$ הוא שווה ל

$$(-8te^{-18t^2}, -4te^{-18t^2}, -1)$$

אנחנו צריכים ש $(2, 1, a)$ יהיה ניצב אליו. כלומר

$$-16te^{-18t^2} - 4te^{-18t^2} - a = 0$$

ולכן

$$a = -20te^{-18t^2}$$

למשל עבור הנקודה שבחרנו שבה $t = 1$ נקבל $a = -20e^{-18}$.

5.

(א) נחשב ראשית עבור $\arctan \frac{y}{x}$

$$f_x' = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot (-\frac{y}{x^2}) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$f_{xx}^{''} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y^{'} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot (\frac{1}{x}) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$f_{yy}^{''} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

לכן ברור שהסכום

$$f_{xx}^{''} + f_{yy}^{''} = 0$$

(ב) נעבור ל $\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$:

$$f_x^{'} = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

$$f_{xx}^{''} = \frac{-(x^2+y^2)+2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

בחישוב סיטמרי נקבל

$$f_{yy}^{''} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ושוב ברור ש

$$f_{xx}^{''} + f_{yy}^{''} = 0$$

6. ראשית, ברור כי

$$f_y^{'}(0,0) = f_x^{'}(0,0) = 0$$

נמצא גם את ערך הנגזרות החלקיות במקומות נוספים:

$$f_x^{'}(x,y) = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

לכן ברור כי

$$f_x^{'}(0,y) = -y$$

והנגזרת החלקית השניה היא

$$f_y^{'}(x,y) = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

לכן

$$f_y^{'}(x,0) = x$$

כעת נחשב את הנגזרות המעורבות ונקבל:

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_x(0,t) - f_x(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-t}{t} = -1$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_y(t,0) - f_y(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1$$

הנגזרות המעורבות קיימות אבל לא שוות.

7. נבצע החלפת משתנים: נתחיל עם g_s

$$g_s = f_x x_s + f_y y_s$$

עכשיו

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(f_s) = \frac{\partial}{\partial t}(f_x x_s + f_y y_s) = \frac{\partial}{\partial t}(f_x)x_s + f_x x_{st} + \frac{\partial}{\partial t}(f_y)y_s + f_y y_{st} = \\ (f_{xx}x_t + f_{xy}y_t)x_s + f_x x_{st} + (f_{yx}x_t + f_{yy}y_t)y_s + f_y y_{st} = \\ f_{xx}x_t x_s + f_{xy}y_t x_s + f_x x_{st} + f_{yx}x_t y_s + f_{yy}y_t y_s + f_y y_{st}\end{gathered}$$

במקרה שלנו

$$x_s = x_t = e^{s+t} = x$$

$$x_{ts} = e^{s+t} = x$$

$$y_s = e^{s-t} = x$$

$$y_t = -e^{s-t} = -y$$

$$y_{st} = -e^{s-t} = -y$$

אם נציב את כל אלה בביטוי שלנו נקבל ש

$$\begin{aligned}g_{st} = f_{xx}x^2 - f_{xy}xy + f_x x + f_{yx}xy - f_{yy}y^2 - f_y y = \\ f_{xx}x^2 + f_x x - f_{yy}y^2 - f_y y\end{aligned}$$

לכן ברור ש

$$g_{st} = 0 \Leftrightarrow x^2 f_{xx} + x u_x = y^2 f_{yy} + y f_y$$