תרגול - מטריצות

אלגברת מטריצות:

הגדרה: אוסף המטריצות מגודל $m\times n$ עם כניסות ב $\mathbb{F}$ מסומן ב $\mathbb{F}^{m\times n}$ או $M_{m\times n}(\mathbb{F})$

הערה: שתי מטריצות $A=B$ שוות, אם הם מאותו גודל ולכל i,j מתקיים $A_{i,j}=B_{i,j}$
(כלומר שווה בכל כניסה)

על מטריצות ניתן להגדיר את הפעולות הבאות:

חיבור/חיסור מטריצות יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$ אזי החיבור בניהם $A+B\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מוגדר (ע"י הגדרת הכניסה ה i,j) $(A+B)_{ij}:=(A)_{ij}+(B)_{ij}$.

לדוגמא

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\end{pmatrix}$$

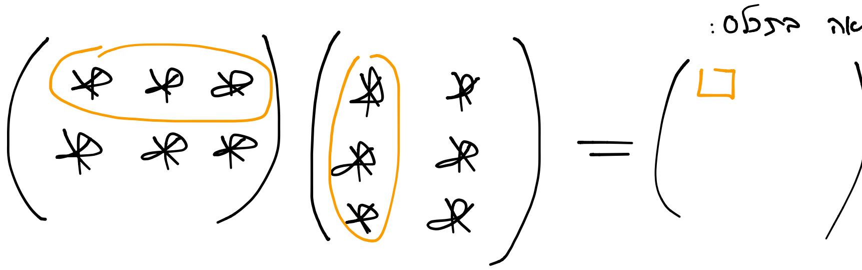
כפל בסקלאר יהיו $A\in\mathbb{F}^{m\times n},\alpha\in\mathbb{F}$ אזי הכפל בניהם $\alpha\cdot A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מוגדר
$(\alpha A)_{ij}=\alpha(A)_{ij}$

לדוגמא

$$3\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6&9\\12&15&18\end{pmatrix}$$

הגדרה: **כפל מטריצות** יהיו $A\in\mathbb{F}^{m\times n},\ B\in\mathbb{F}^{n\times k}$ (שימו לב שמספר העמודות של A זהה למספר השורות של B) אזי המכפלה $AB\in\mathbb{F}^{m\times k}$ והאיבר ij בכפל AB מוגדר להיות
$[AB]_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$

איך זה נראה בתכלס:



דוגמא $B=\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}_{2\times2}$, $A=\begin{pmatrix}1&5\\-2&3\\3&-7\end{pmatrix}_{3\times2}$ אזי $AB\in\mathbb{R}^{3\times2}$. נחשב את

המקדם 1,1 של המכפלה

$A\in\mathbb{F}^{m\times n},\ B\in\mathbb{F}^{n\times l},\ AB\in\mathbb{F}^{m\times l}$

$AB=\begin{pmatrix}4&11\\5&4\\-10&-11\end{pmatrix}$

$[AB]_{1,1}=(1\ \ 5)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=1\cdot(-1)+5\cdot1=-1+5=4$

$$[AB]_{3,1} = (3,-7)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = 3\cdot(-1)+(-7)\cdot 1 = -3-7 = -10$$

תכונות:

* כפל קיבוצי $(AB)C = A(BC)$
* פילוג $A(B+C)=AB+AC$
* הוצאת סקלר α: $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$
* חילוף בחיבור $A+B=B+A$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\-3 & 0\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}-7 & 1\\-15 & 3\end{pmatrix} \qquad BA=\begin{pmatrix}2 & \\ & \end{pmatrix}$$

כבר מהאיבר הראשון שחישבנו

$BA \neq AB$

חזרה למערכת משוואות לינארית

אבחנה: ראינו כי מערכת משוואות

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

ניתן להציג במטריצה $(A|b)$ כאשר $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ היא **מטריצת המקדמים** (הכניסה ה i,j שלה שווה ל $a_{i,j}$) ו $b \in \mathbb{F}^{m\times 1}$ הוא **וקטור הפתרון** (הכניסה ה i,1 שלו שווה ל b_i). כעת נגדיר את וקטור הנעלמים $x \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

בסימונים אלו ובהגדרת כפל מטריצות מתקיים כי $Ax = b$ בדיוק מייצג את מערכת המשוואות הלינארית. מכאן והלאה נשתמש ב $Ax = b$ בלי (אולי) להדגיש את גודל המטריצה (בדר"כ $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ גם אם לא צוין) . בנוסף לעיתים נתייחס ל $\mathbb{F}^{n\times 1}$ כ $\mathbb{F}^n$

תרגיל 3.4 ג-ז

נתונה מערכת של m משוואות בn נעלמים: Ax=b. נסמן ב $H = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = 0\}$ את קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה, וב $L = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = b\}$ את קבוצת הפתרונות של המערכת הלא-הומוגנית. הוכח את הטענות הבאות:

ד

מצא מקרה שבו אין פתרונות למערכת הלא הומוגנית, אך יש פתרון יחיד למערכת ההומוגנית

פתרון

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

במערכת הלא-הומוג' — אין פתרון כי יש שורת סתירה (אפסים במקדמים $b\neq 0$)

לעומת זאת, במערכת ההומוג'

$$\begin{array}{ccc} x & y & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ה

מצא מקרה שבו אין פתרונות למערכת הלא הומוגנית, אך יש אינסוף פתרונות למערכת ההומוגנית

פתרון

בלא הומוגני: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

אכן אין פתרון

בהומוגני $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ נסמן את y בt $\qquad 1\cdot x + 1\cdot t = 0$

$\left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{F} \right\}$ $\qquad x = -t$

ז

נתון שמספר המשוואות זהה למספר הנעלמים. עוד נתון שאין פתרונות למערכת הלא-הומוגנית.
מה ניתן לומר על מספר הפתרונות של המערכת ההומוגנית?

פתרון

אין פתרונות ללא הומוגני $\leftarrow$ שורת סתירה (אפסים במקדמים)
כיוון שיש אותו מס׳ משוואות כמס׳ הנעלמים, יש משתנה שבצורה
המדורגת אין איבר ציר בעמודתו $\leftarrow$ אינסוף פתרונות

סוגים שונים של כפל מטריצות

כפל שורה:

$$A = \begin{pmatrix} - R_1 - \\ - R_2 - \\ \vdots \\ - R_n - \end{pmatrix} \qquad x = (a_1, a_2 \dots a_n)$$

$$xA = \sum_{i=1}^{n} a_i R_i$$

דוגמא: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$R_3(AB) = R_3(A)\cdot B = (3 \ \ -7)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3(-1, 1) + (-7)(1, 2) =$$
$$(-3, 3) + (-7 \ \ -14) = (-10, -11)$$

$$R_1(AB) = R_1(A)\cdot B = (1 \ \ 5)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1(-1 \ \ 1) + 5(1 \ \ 2)$$

כפל עמודה:

באופן דומה,

$$x = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$Ax = \sum_{i=1}^{m} a_i C_i \qquad C_3(AB) = A \cdot C_3(B)$$

תרגיל 3.7

תהא מערכת Ax=b, יהיה v פתרון למערכת הלא-הומוגנית ו-w פתרון למערכת ההומוגנית Ax=0. נגדיר $B = (v, w, v + w, v - w, w - v)$ חשב את AB

פתרון

$$A \in \mathbb{F}^{m \times n} \qquad x \in \mathbb{F}^{n \times 1} \qquad B = \begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ v & w & v+w & v-w & w-v \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix}$$

$$C_1(AB) = A \cdot C_1(B) = A \cdot v = \begin{matrix} | \\ b \\ | \end{matrix}$$

$$C_2(AB) = A \cdot C_2(B) = Aw = 0$$

נעשה כפל עמודה לשאר העמודות-

$$AB = (b, 0, b, b, -b)$$

שחלוף וסימטריות

הגדרה: תהי מטריצה $A \in F^{n\times m}$. אזי המטריצה המשוחלפת $A^t \in F^{m\times n}$ מוגדרת ע"י $[A^t]_{ij} = [A]_{ji}$. כלומר, האיבר בשורה ה-i והעמודה ה-j של המטריצה המשוחלפת הוא האיבר בשורה ה-j והעמודה ה-i של המטריצה המקורית - הפכנו את השורות לעמודות, ואת העמודות לשורות.

דוגמא: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

- **הגדרה:** מטריצה נקראת סימטרית אם היא שווה למשוחלפת של עצמה; כלומר $A = A^t$ (השורות והעמודות שלה זהות). מטריצה נקראת אנטי-סימטרית אם $A = -A^t$

$\begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 5 \end{pmatrix}$, $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}}_{B}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

סימטרית!

$B^t = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = -B$

תכונות:

- לכל שתי מטריצות A,B עבורן הכפל מוגדר, מתקיים $(AB)^t = B^tA^t$.
- $(A^t)^t = A$
- לכל שתי מטריצות מאותו סדר A,B מתקיים $(A+B)^t = A^t + B^t$
- לכל מטריצה A ולכל קבוע מהשדה α מתקיים ש $(\alpha A)^t = \alpha(A^t)$

תרגיל 4.4

א. הוכח שלכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ המטריצה AA^t הינה סימטרית.

ב. הוכח שלכל מטריצה ריבועית A (כלומר $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$) מתקיים שהמטריצה $A + A^t$ סימטרית, ואילו המטריצה $A - A^t$ אנטי סימטרית.

פתרון

סמן $B = A^t$

א) $(AA^t)^t = (AB)^t = B^tA^t = (A^t)^t \cdot A^t = A \cdot A^t$

ב) $(A+A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$

$(A-A^t)^t = A^t - A = -(A-A^t)$

תרגיל 4.5

א. תהי A מטריצה ריבועית ממשית (כלומר שאיבריה משדה הממשיים) אנטי סימטרית. הוכח שכל איברי האלכסון שלה שווים לאפס.

פתרון

$\forall i,j \quad [A]_{ij}=-[A]_{ji}$

נכון גם כאשר $i=j$

$[A]_{ii}=-[A]_{ii} \quad /+[A]_{ii}$

$1\cdot A_{ii}+1\cdot A_{ii}=0$

$(1+1)A_{ii}=0$

כיון שאין מחלקי 0 בשדה, או $A_{ii}=0$, או $1+1=0$

אנחנו ב $\mathbb{R}$ $\Leftarrow 1+1\neq 0 \Leftarrow A_{ii}=0$

מטריצות ריבועיות

- מטריצה משולשת
  - מטריצה משולשת עליונה היא מהצורה

$$A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$ כלומר $a_{ij}=0$ לכל $j<i$.

  - מטריצה משולשת תחתונה היא מהצורה

$$A=\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & \ddots & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$$ כלומר $a_{ij}=0$ לכל $i<j$.

- מטריצה אלכסונית היא מהצורה

$$A=\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$ כלומר $a_{ij}=0$ לכל $i\neq j$.

- מטריצה סקלארית היא מהצורה

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}=\alpha I_n$$

יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ סקלריות. $\forall i\neq j: A_{ij}=B_{ij}=0$

$i=j \quad A_{ij}=a \quad B_{ij}=b$

$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$

כי ראינו $k\neq i\neq j$ $(AB)_{ij}=0$

נשאר רק עם $i=j$ $(AB)_{ii}=\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{ki}$

$=A_{ii}\cdot B_{ii}=a\cdot b$

נוכיח שכפל של אלכסוניות היא אלכסונית. $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אלכסוניות.

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

כיון ש A, B אלכסוניות, $\forall i\neq k: a_{ik}=0$ $\forall j\neq k\ b_{kj}=0$ $\Rightarrow$ $\forall k\neq i,j\ AB_{ij}=0$

קיבלנו שהאיברים בAB שונים מאפס הם רק כש $i=j$ (אלכסון)

תעשו באותו אופן להוכיח סקלריות, משולשיות.

עקבה

הגדרה: העקבה (trace) של מטריצה ריבועית הינה סכום איברי האלכסון של המטריצה.

$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ $tr(A)=5$

תכונות:

- $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(AB) = tr(BA)$
- $tr(\alpha A) = \alpha \cdot tr(A)$

הוכח שלא קיימות מטריצות ריבועיות ממשיות כך ש $AB - BA = I$. האם הדבר נכון לכל שדה?

נחשב $tr(AB-BA)$ ו $tr(I)$

$$tr(AB-BA) = tr(AB) - tr(BA) = tr(AB) - tr(AB) = 0$$

$$tr(I) = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n}$$

מעל $\mathbb{R}$, סכום אחדים לעולם לא יתאפס

א. תהא A מטריצה ממשית כך ש $tr(AA^t) = 0$. הוכח ש-A הינה מטריצת האפס.

ב. תהא A מטריצה מרובבת כך ש $tr(AA^*) = 0$. הוכח ש-A הינה מטריצת האפס.
($A^* := \overline{A^t}$)

פתרון:

$$AB_{ij} = R_i(A)\,C_j(B)$$ (א)

$$[R_i(A)]^t = C_i(A^t)$$

$$(* \cdots\cdots *) \longrightarrow \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$$

$$tr(AA^t) = \sum_{i=1}^{n} [AA^t]_{ii} = \sum R_i(A)\cdot C_i(A^t) = \sum R_i(A)\cdot [R_i(A)]^t$$

$$\underbrace{(v_1 \ldots v_n)}_{\vec{v}} \overbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}^{\vec{v}^t} = v_1^2 + v_2^2 \cdots + v_n^2 \Longrightarrow \vec{v}\cdot\vec{v}^t = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

נקבל, סכום של כל איברי המטריצה בריבוע $= tr(AA^t)$

בגלל $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, אם $tr(AA^t) = 0$, אזי כל האיברים $= 0$

תרגיל

ראינו למעלה שלכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מתקיים שהמטריצה AA^t הינה סימטרית. האם הכיוון ההפוך נכון? כלומר, האם לכל מטריצה סימטרית $B \in \mathbb{F}^{m\times m}$ קיימת $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ כך ש-$B = AA^t$?

<u>לא</u>

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, נשים לב $0 = tr(B)$

אם אכן קיימת A כך ש $B = AA^t$ $\longrightarrow$ $\underset{tr(B)}{\underset{\shortparallel}{tr(AA^t)}} = 0$

אם זה אכן המצב, $A = 0$ בגלל התרגיל הקודם

$0 \cdot 0^t \neq B$