תחומי שלמות

0

הפיכים = חברים של 1($a \sim b$) a, b חברים) אם $a|b, b|a \Leftrightarrow b = a \cdot u$, u הפיך)

אי פריקים: אין פירוק($a = bc$) לא טריוויאלי
[אם a אי פריק, גם כל החברים שלו אי פריקים]

ראשוני: p ראשוני $\Leftrightarrow$ $(p|b \vee p|a \Leftarrow p|ab)$

ב$\mathbb{Z}$:

לכל איבר יש פירוק יחיד לגורמים אי פריקים.
יש חוגים שבהם זה לא מתקיים - אולי "אין מספיק" איברים אי פריקים, אולי יש "יותר מדי" איברים אי פריקים.

הגדרה

תחום שלמות R הוא <u>אטומי</u> אם כל איבר($\neq 0$, לא הפיך) הוא מכפלה של איברים אי פריקים.

טענה

כל החוגים O_D אטומים.

הוכחה

נוכיח באינדוקציה על הערך המוחלט של הנורמה.
יהי $a \in O_D$. אם a אי פריק - גמרנו. אחרת $a = bc$ כאשר $1 < |N(b)|\,|N(c)|$.

$$|N(a)| = |N(b)|\,|N(c)|$$

לפי הנחת האינדוקציה, b, c מכפלות של איברים אי פריקים, לכן גם $a = bc$ כנ"ל.

דוגמה

$\mathbb{F}$ - שדה. $R = \mathbb{F}[x_1, \dots x_n]$ אטומי.

הוכחה

נגדיר $\deg : R \to \mathbb{N}$ לפי המעלה הכוללת(למשל $\deg\left(x_1^3 x_2^4 - x_3^6\right) = 7$)
יהי $f \in R \pm 0$.
f הפיך $\Leftrightarrow f \in F \Leftrightarrow \deg(t) = 0$
אם f הפיך - גמרנו. אחרת, $f = gh$ כאשר g, h לא הפיכים, ולכן

$$\deg f \stackrel{?}{=} \deg g + \deg h$$

עובדה

יש תחומי שלמות אטומיים A כך ש$A\left[x\right]$ אינו אטומי.

דוגמה לחוג לא אטומי

$$F\left[x\right]\subset F\left[x^{\frac{1}{2}}\right]\subset F\left[x^{\frac{1}{6}}\right]\subset F\left[x^{\frac{1}{24}}\right]\subset F\left[x^{\frac{1}{120}}\right]\subset\ldots$$

$$R=\bigcup_{n=1}^{\infty}F\left[x^{\frac{1}{n!}}\right]$$

תרגיל

- איחוד של שרשרת חוגים הוא חוג.
- איחוד של שרשרת חוגי שלמות הוא תחום שלמות.

נגדיר

$$\overline{\deg}:R\to\mathbb{Q}$$

$$\underline{\deg}:R\to\mathbb{Q}$$

באופן המובן מאליו

$$\overline{\deg}\left(x+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{7}{4}}\right)=\frac{7}{4}$$

$$\underline{\deg}\left(x+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{7}{4}}\right)=\frac{1}{3}$$

$$w\left(f\right)=\overline{\deg}\left(f\right)-\underline{\deg}\left(f\right)\geq0$$

תרגיל:

$$w\left(fg\right)=w\left(f\right)+w\left(g\right)$$
$$w\left(1\right)=0$$

$\Leftarrow$ כל איבר הפיך הוא בעל רוחב 0, כלומר מהצורה $a\cdot x^{\alpha}$, ולכן סקלר.

$\Leftarrow$ אם $f|g$ אז $w\left(f\right)\leq w\left(g\right)$. בפרט, כל מחלק של מונום הוא מונום.

מצד שני, כל מונום מתפרק:

$$a\cdot x^{\alpha}=ax^{\frac{\alpha}{2}}\cdot x^{\frac{\alpha}{2}}$$

מסקנה

x אינו מכפלה של גורמים אי פריקים!
[ל-x, שהוא פריק, אין אף גורם אי פריק]

הגדרה

אם $a|b$ והם לא חברים, נסמן $a!b$.

הגדרה

תחום שלמות מקיים את "תנאי שרשרת המחלקים" אם לא קיימת שרשרת אינסופית

$$\cdots!a_4!a_3!a_2!a_1$$

משפט

כל תחום המקיים את תנאי שרשרת המחלקים הוא אטומי.

הוכחה

נניח שלא - R מקיים תנאי השרשרת, אבל הוא לא אטומי.
נסמן $R \supseteq \{\text{מכפלות של גורמים אי פריקים}\} = A$. שימו לב ש-$A$ סגור לכפל. מכיוון ש-R לא אטומי, יש $a_1 \notin A$. לכן a_1 פריק. מכיוון ש-$a_1 \notin A$, יש לו גורם אמיתי $a_2|a_1$ שאינו ב-A.
כך אפשר לבנות שרשרת אינסופית $\ldots!a_5!a_4!a_3!a_2!a_1$ וזו סתירה להנחה.

הערה

מכיוון ש-$Rb \subsetneqq Ra \Leftrightarrow a|b$,
R מקיים את תנאי שרשרת המחלקים $\Leftrightarrow$ לא קיימת שרשרת $Ra_1 \subset Ra_2 \subset Ra_3 \subset \ldots$

תזכורת: אידאל מהצורה Ra נקרא אידאל ראשי - Principal Ideal

סיכום

תנאי שרשרת המחלקים = לא קיימת שרשרת עולה של אידיאלים ראשיים.