מבוא לחוגים ומודולים - תרגול 10

המאפס והפיתול

הגדרה: (annihilator)

יהי M מודול מעל R. <u>המאפס</u> (המשמאלי) של $x\in M$ הוא

$$Ann_R(x)=\{r\in R \mid rx=0\} \le_\ell R$$

באופן דומה, לכל $S\subseteq M$,

$$Ann_R(S)=\{r\in R \mid rS=0\}=\bigcap_{x\in S} Ann_R(x)$$

הגדרה:

יהי M מודול מעל R. איבר $0\neq x\in M$ הוא <u>מפותל</u> (torsion) אם קיים $r\in R$ רגולרי (לא מחלק אפס) כך ש- $rx=0$.

נגדיר את <u>הפיתול</u> של M להיות

$$Tor_R(M)=\{m\in M \mid \exists\, 0\neq r\in R : rm=0\}$$

נאמר ש- M <u>מפותל</u> אם $Tor_R(M)=M$. נאמר ש- M <u>חסר פיתול</u> אם האיבר היחיד המפותל בו הוא 0_M.

דוגמאות:

א. כל חבורה אבלית G היא $\mathbb{Z}$-מודול.

$$ng=\underbrace{g+\dots+g}_{n\text{ פעמים}}$$

$g\in G$ מפותל $\iff$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $ng=0$ $\iff$ $o(g)<\infty$.

ב. $M=\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $R=\mathbb{Z}$. $Tor_R(M)=\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}=M$, כי אפשר לקחת $r=6$.

ג. $M=\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $R=\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. $Tor_R(M)=\{\bar{0},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$.

$$Ann_{\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}(3+6\mathbb{Z}) = \{0+6\mathbb{Z},\ 2+6\mathbb{Z},\ 4+6\mathbb{Z}\}$$

3. R <u>תמ"ש</u>, $M=R$. $Tor_R(M)=\{0\}$ כי אין מחלקי אפס.
זהו מודול חסר פיתול. באופן דומה, גם R^n הוא מודול חסר פיתול.

יהי $0\neq a\in R$ ונתבונן ב- $M' = R/\langle a\rangle$. זה מודול מפותל מעל R, כי לכל $r+\langle a\rangle \in M'$ נקבל
$a\cdot(r+\langle a\rangle) = ar+\langle a\rangle = 0+\langle a\rangle = 0_{M'}$.

<u>טענה:</u>

$Tor_R(M)$ הוא תת-מודול של M (כאשר R תמ"ש).

<u>טענה:</u>

אם R תמ"ש ~~אם $Tor_R(M)$ הוא תת-מודול של M~~, אז
$M/Tor_R(M)$ הוא מודול חסר פיתול מעל R.

<u>הוכחה:</u>

יהי $m\notin Tor_R(M)$ ונניח בשלילה ש- $m+Tor_R(M)$ מפותל ב- $M/Tor_R(M)$.
לכן קיים $0\neq r\in R$ כך ש-

$$r(m+Tor_R(M)) = 0+Tor_R(M)$$
$$r(m+Tor_R(M)) = rm+Tor_R(M)$$

$\Leftarrow rm\in Tor_R(M)$. לכן קיים $0\neq s\in R$ כך ש- $\underbrace{(sr)}_{\neq 0}m \overset{\text{תמ"ש}}{=} s(rm) = 0$

לכן $m\in Tor_R(M)$, בסתירה. $\square$

<u>הערה:</u>

אם R תמ"ש, כל מודול M מעל R אפשר לכתוב $M\cong Tor_R(M)\times \left(M/Tor_R(M)\right)$.

דוגמה:

$M=\mathbb{Z}^3\times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ כמודול מעל $R=\mathbb{Z}$.

$Tor_R(M)\cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$M/Tor_R(M)\cong \mathbb{Z}^3$

הגדרה:

יהי M מודול מעל R, אומרים ש-M <u>נאמן</u> (faithful) אם $Ann_R(M)=0$.

הערה:

כל מודול חסר פיתול הוא בפרט נאמן, ההיפך לא נכון.

$R=\mathbb{Z}$, $M=\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

M מפותל כי לכל $\frac{m}{n}+\mathbb{Z}\in M$, $n\cdot\left(\frac{m}{n}+\mathbb{Z}\right)=m+\mathbb{Z}=0+\mathbb{Z}$.

M נאמן כי לכל $0\neq n\in\mathbb{Z}$, $n\cdot\left(\frac{1}{2n}+\mathbb{Z}\right)=\frac{1}{2}+\mathbb{Z}\neq 0+\mathbb{Z}$.

דוגמה:

$R=\mathbb{Z}$, $M=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $Ann_R(M)=n\mathbb{Z}$.

תרגיל:

אם M מודול מעל R, אז M מודול מעל $R/Ann_R(M)$.

הוכחה:

נגדיר פעולה של $R/Ann_R(M)$ על M:

$$(r+Ann_R(M))\cdot m=rm$$

צריך לוודא שזה מוגדר היטב. נניח ש-$r+Ann_R(M)=s+Ann_R(M)$, אז $r-s\in Ann_R(M)$

$$(r+\mathrm{Ann}_R(M))m = rm = ((r-s)+s)m =$$

$$= \underbrace{(r-s)m}_{=0} + sm = (s+\mathrm{Ann}_R(M))m$$

כי $r-s\in \mathrm{Ann}_R(M)$

שאר האקסיומות - תרגיל.

$\square$

מסקנה:

M יורש מבנה מעל R/I $\iff$ $I\subseteq \mathrm{Ann}_R(M)$.

דוגמה:

$V=\mathbb{R}^3$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

V הוא $\mathbb{R}[x]$ - מודול לפי $f(x)\cdot v = f(A)\cdot v$.

הפולינום האופייני של A הוא

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2-1)$$

לפי משפט קיילי-המילטון, $p_A(A)=0$. לכן לכל $v\in V$ מתקיים

$$p_A(x)\cdot v = p_A(A)v = 0 \Rightarrow \langle p_A(x)\rangle \subseteq \mathrm{Ann}_R(M)$$

לכן V מקבל גם מבנה של מודול מעל $\mathbb{R}[x]/\langle p_A(x)\rangle = \mathbb{R}[x]/\langle (x-1)(x^2-1)\rangle$.

טענה:

יהיו M,N מודולים איזומורפיים מעל R. אז $\mathrm{Ann}_R(M)=\mathrm{Ann}_R(N)$.

הוכחה:

יהי $\varphi: M\longrightarrow N$ איזומורפיזם של מודולים מעל R. יהי $r\in \mathrm{Ann}_R(M)$.

לכל $n\in N$ מתקיים

$$rn = r\cdot\varphi(\varphi^{-1}(n)) \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi \text{ איזומורפיזם של מודולים מעל } R}}{=} \varphi(r\cdot \underbrace{\varphi^{-1}(n)}_{\in M}) \underset{\substack{\uparrow \\ r\in \mathrm{Ann}_R(M)}}{=} \varphi(0_M) = 0_N.$$

זה מראה ש- $Ann_R(M)\subseteq Ann_R(N)$. באופן סימטרי מוכיחים את ההכלה השנייה, ולכן יש שוויון. □

מסקנה:

יהי R חוג ויהיו $L,L'\leq_l R$. אז $R/L \cong R/L'$ כמודולים מעל R אם ורק אם $L=L'$.

(למה? $Ann_R(R/L)=L$)

מודולים מעל תחומים ראשיים

מעכשיו ועד סוף התרגול, R תחום ראשי.

משפט:

כל תת-מודול של R^n הוא חופשי מדרגה קטנה או שווה ל-n.

(דרגה = כמות היוצרים המינימלית)

משפט:

כל תת-מודול של R^n הוא מהצורה $A\cdot R^n$ לאיזשהו $A\in M_n(R)$.

דוגמה:

נמצא בסיס לתת-המודול הבא של $\mathbb{Z}^3$ מעל $\mathbb{Z}$:

$$M=\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{(1,0,-1),\ (2,-3,1),\ (4,-3,-1)\}$$

המטריצה שמתאימה לתת-המודול הזה היא

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -3 & -3\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

ונדרג אותה בעזרת פעולות עמודה (כי פעולות שורה משנות את מרחב העמודות):

$$\begin{pmatrix}1&2&4\\0&-3&-3\\-1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[C_3\leftarrow C_3-4C_1]{C_2\leftarrow C_2-2C_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&-3\\-1&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow{C_3\leftarrow C_3-C_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\-1&3&0\end{pmatrix}$$

לכן $\{(1,0,-1),(0,-3,3)\}$ בסיס של תת-המודול הזה.

מה לגבי מודולים נוצרים סופית לא חופשיים?

<u>משפט:</u>

כל מודול נוצר סופית מעל R הוא איזומורפי למנה $M_A=R^n/A\cdot R^n$ עבור איזשהו $A\in M_n(R)$.

איך זה עובד? נניח של-M יש n יוצרים $x_1,\dots,x_n$.

נגדיר $\pi:R^n\to M$ לפי $\pi(e_i)=x_i$. זה אפימורפיזם.

R תחום ראשי. לכן $\ker\pi$ נוצר סופית כתת-מודול של R^n וניתן לבחור בסיס $y_1,\dots,y_n$ של R^n שעבורו $a_1y_1,\dots,a_ny_n$ בסיס של $\ker\pi$. אז

$$M\cong R^n/\ker\pi=Ry_1\oplus\cdots\oplus Ry_n/Ra_1y_1\oplus\cdots\oplus Ra_ny_n\cong$$

$$\cong R/Ra_1\oplus\cdots\oplus R/Ra_n$$

כדי למצוא את ה-A המתאימה נסתכל על $\ker\pi$ ונמצא את $A\in M_n(R)$ כך ש- $\ker\pi=A\cdot R^n$.

למשל, אם $A=\begin{pmatrix}k&&0\\&k&\\0&&\ddots\;k\end{pmatrix}$, $k\in\mathbb{Z}$, $R=\mathbb{Z}$ $M=\mathbb{Z}^n$

$$M_A=\mathbb{Z}^n/A\cdot\mathbb{Z}^n=\mathbb{Z}^n/\begin{pmatrix}k&&\\&k&\\&&\ddots k\end{pmatrix}\mathbb{Z}^n=\{(a_1,\dots,a_n)+k\cdot(b_1,\dots,b_n)\mid a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{Z}$$

$$\cong (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^n$$

הגדרה:

ל- $A,B\in M_n(R)$, $A\sim B$ (דומה) $\iff$ קיימות $P,Q\in GL_n(R)$ כך ש- $B=PAQ$.

טענה:

$A\sim B \iff M_A\cong M_B$.

איך נבין מודולים מעל תחום ראשי?

כל מטריצה A כדי אפשר לדרג על ידי פעולות שורה עמודה עד לקבלת $A\sim \mathrm{diag}(d_1,\dots,d_r,\underbrace{0,\dots,0}_{m \text{ אפסים}})$, $d_1|d_2|\dots|d_r$.

הצורה הזו יחידה עד כדי חברות. לאיברים $d_1,\dots,d_r$ קוראים הגורמים האינווריאנטים של M. אז

$$M\cong R^m\times R/\langle d_1\rangle\times\dots\times R/\langle d_r\rangle$$

$$Tor(M)=R/\langle d_1\rangle\times\dots\times R/\langle d_r\rangle, \quad M/Tor(M)\cong R^m$$

M_A מפותל $\iff$ אין אפסים, כלומר $m=0$.

M_A חסר פיתול $\iff$ הוא חופשי.

דוגמה:

$R=\mathbb{Z}$, $M=\langle x,y \mid nx=0,\ my=0\rangle$ $(m,n\in\mathbb{Z})$

נבחר את הקבוצה הפורשת $\{x,y\}$. נגדיר $\pi:\mathbb{Z}^2\to M$

$\pi(e_1)=x$, $\pi(e_2)=y$

$$\ker\pi = \begin{pmatrix} n&0\\0&m\end{pmatrix}\mathbb{Z}^2, \quad M\cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

תרגיל:

חשבו את הסדר של החבורה האבלית

$$G = \left\langle a,b,c \;\middle|\; \begin{array}{l} 2a+4b+3c=0 \\ a+2b+3c=0 \\ a+4b+9c=0 \\ ab=ba,\ ac=ca,\ bc=cb \end{array} \right\rangle$$

פתרון:

חבורה אבלית = $\mathbb{Z}$-מודול. היא נוצרת סופית, למשל ע"י $\{a,b,c\}$.

נגדיר $\pi:\mathbb{Z}^3 \longrightarrow G$ לפי

$$\pi(e_1)=a$$
$$\pi(e_2)=b$$
$$\pi(e_3)=c$$

ברור שהגרעין $\ker\pi$ נוצר ע"י היחסים שמגדירים את G,
ונרצה למצוא צורה קנונית למטריצת היחסים:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1}$$

צריך דירוג קנוני ולא דירוג גאוס
בכל שלב מביאים את האיבר הכי
קטן לפינה השמאלית העליונה
ומאפסים את כל השורה והעמודה

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1]{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - C_3}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftarrow (-C_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 4R_2}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\circ\, G \cong \mathbb{Z}/_{\langle 1 \rangle} \times \mathbb{Z}/_{\langle 1 \rangle} \times \mathbb{Z}/_{\langle 6 \rangle} \cong \mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$$