מקליד: עידן אריה
מרצה: פרופ' נתן נתניהו
תאריך: 2018-12-19

עיבוד תמונות
89-560-01

כל גל סינוס יש לו עצמה/מנעד/אמפליטודה ותדר.

התמרת פורייה חד־מימדית

עבור $f(x)$ לא מחזורית, ניתן לבטא את הפונקציה ע"י מקדמים הניתנים ע"י התמרת פורייה.

הגדרה תהי $f(x)$ פונקציה ממשית רציפה. התמרת פורייה של הפונקציה $\mathcal{F}(f(x))$ מוגדרת ע"י:

$$F(w)=\mathcal{F}(f(x))=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i2\pi wx}\,\mathrm{d}x$$

ובהינתן מקדמי פוריה $F(w)$, הפונקציה $f(x)$ ניתנת לביטוי באמצעות התמרת פורייה ההופכית (inverse Fourier transform) כדלקמן:

$$f(x)=\mathcal{F}^{-1}(F(w))=\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(w)\,e^{i2\pi wx}\,\mathrm{d}w$$

w הוא התדר, וזה "ציר הx" ב$F(w)$.

המטרה תהיה להתערב באופן ישיר במבנה הספקטרלי של התמונה. ללכת לערכי w שונים ולשנות שם את הערכים. אז אפשר לעשות התמרה הופכית ולקבל חזרה את התמונה - עם השינוי שעשינו בתדרים.

לפעמים יותר קל להבין את משמעות הבעיה כאשר דנים בה במישור חלופי - במישור התדר. דווקא שם יותר קל להתייחס אליה מבחינת המשמעות של הפעולות הנדרשות.

להתמרת פורייה יש חלק ממשי וחלק מדומה:

$$F(w)=\mathcal{R}(F(w))+i\mathcal{I}(F(w))$$

$$\mathcal{R}(F(w))=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi wx)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{I}(F(w))=-\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(2\pi wx)\,\mathrm{d}x$$

האמפליטודה שלה היא:

$$|F(w)|=\sqrt{\mathcal{R}(w)^2+\mathcal{I}(w)^2}$$

והפאזה:

$$\phi(w)=\arctan\frac{\mathcal{I}(w)}{\mathcal{R}(w)}$$

דוגמה - פונקציית sinc חד מימדית

עבור הפונקציה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} A & \left|x\right|\leq\frac{T}{2}\\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

נפתח טור פורייה:

$$F\left(w\right)=\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}}Ae^{-i2\pi wx}\,\mathrm{d}x$$

משתמשים בזהות $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, ואז:

$$F\left(w\right)=AT\cdot\frac{\sin\pi wT}{\pi wT}=AT\cdot\operatorname{sinc}\left(wT\right)$$

כאשר

$$\operatorname{sinc}\left(x\right)\overset{def}{=}\frac{\sin\left(\pi x\right)}{\pi x}$$

התמרת פורייה דו מימדית

כדי לטפל בתמונות, נתעניין בהרחבת התמרת פורייה לשני מימדים:

$$F\left(u,v\right)=\mathcal{F}\left(f\left(x,y\right)\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(x,y\right)e^{-i2\pi\left(ux+vy\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

וההתמרה ההופכית:

$$f\left(x,y\right)=\mathcal{F}^{-1}\left(F\left(u,v\right)\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F\left(u,v\right)e^{i2\pi\left(ux+vy\right)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

u ו- v מסמלים את התדרים בכיוון אופקי ואנכי בהתאמה. הdomain של תמונות הכוונה בעיקר למחזורים ליחידת אורך, כגון מספר קווים/מ"מ. מתייחסים לתדירות מעין זו כאל תדירות מרחבית (spatial frequency).

דוגמה - פונקציית sinc דו מימדית

הגדרה: $f\left(x,y\right)=\mathrm{rect}\left(x,y\right)\overset{def}{=}\begin{cases}1 & \left|x\right|\leq\frac{1}{2},\left|y\right|\leq\frac{1}{2}\\0 & \text{otherwise}\end{cases}$

טענה: $F\left(u,v\right)=\mathrm{sinc}\left(u,v\right)$

הוכחה:

$$F\left(u,v\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(x,y\right)f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}1\cdot e^{-iw\pi\left(ux+vy\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\cdots$$

$$\cdots=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}e^{-iw\pi ux}e^{-iw\pi vy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\cdots$$

מכיוון ש$e^{-iw\pi ux}$ הוא קבוע עבור y ו$e^{-iw\pi vy}$ קבוע עבור x, ניתן לפרק את האינטגל

$$\cdots=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}e^{-i2\pi ux}\,\mathrm{d}x\cdot\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}e^{-i2\pi vy}=\frac{\sin\left(\pi u\right)}{\pi u}\cdot\frac{\sin\left(\pi v\right)}{\pi v}=\mathrm{sinc}\left(u\right)\cdot\mathrm{sinc}\left(v\right)=\mathrm{sinc}\left(u,v\right)$$

מה המשמעות של מרכיב תדר?

$$B_{u,v}=g_{u,v}\left(x,y\right)=\cos\left(2\pi\left(ux+vy\right)\right)+i\sin\left(2\pi\left(ux+vy\right)\right)$$

היחס $\frac{u}{v}$ קובע את הכיוון, והגודל של u,v קובע את התדירות. כל מרכיב תדר הוא בעצם גל דו-מימדי.

תכונות בסיסיות של התמרת פורייה

:scaling

$$\mathcal{F}\left(f\left(a_1x+b_1y,a_2x+b_2y\right)\right)=\left(A_1B_2-A_2B_1\right)\mathcal{F}\left(A_1u+A_2v,B_1u+B_2v\right)$$

כאשר:

$$A_1=\frac{b_2}{a_1b_2-a_2b_1}\qquad B_1=\frac{-b_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$A_2=\frac{-a_2}{a_1b_2-a_2b_1}\qquad B_2=\frac{a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$