

## תרגיל בית 6 במבנים אלגבריים 89-214 סמסטר א' תשע"ו

**הוראות** בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא לתרגול בשבוע המתחיל בתאריך כד' כסלו ה'תשע"ו, 06.12.2015.

**שאלה 1.** תהי  $D_4$  החבורה הדיהדרלית מסדר 8. תארו את כל תת החבורות הלא טריוויאליות של  $D_4$ . הוכיחו כי כולן אבליות. האם כולן ציקליות?

**שאלה 2.** תהי  $A_n$  חבורת החילופין (חבורת התמורות הזוגיות ב  $S_n$ ). ראינו שזו תת חבורה של  $S_n$ , וסדר החבורה:  $\frac{n!}{2}$ . מה הם סדרי האיברים ב  $A_4$ ?

**שאלה 3.** תהי  $S_n$  חבורת התמורות.

א. מצא את תת החבורה הציקלית ב  $S_7$  הנוצרת ע"י התמורה: (57) (123).

ב. מצאו יוצר לחיתוך של תת החבורה שמצאתם בסעיף א' עם חבורת החילופין  $A_7$ .

**שאלה 4.** נגדיר את הקרן  $Z$  של חבורה  $G$  להיות

$$Z(G) = \{g \in G : \forall h \in G, gh = hg\}$$

דהיינו זהו האוסף של כל האיברים ב- $G$  שמתחלפים עם כל איברי  $G$ .

א. הוכיחו כי לכל חבורה  $G$  מתקיים  $Z(G) \leq G$  (כלומר שהמרכז של חבורה הינו תת חבורה).

ב. מצאו את  $Z(S_3)$  ואת  $Z(D_3 \times \mathbb{Z}_4)$ .

ג. הוכיחו  $Z(D_{2n+1}) = \{e\}$  וכי  $Z(D_{2n}) = \langle \sigma^n \rangle$  עבור  $n > 1$ . רמז: איך נראה איבר כללי בחבורה הדיהדרלית?

**שאלה 5.** הראו שמתקיים:  $S_3 = \langle (12), (23) \rangle = \langle (12), (123) \rangle$ .

**שאלה 6.** מצאו תת חבורה ציקלית מסדר 8 ותת חבורה לא ציקלית מסדר 8 של  $U_{32}$ .

**שאלה 7** (אתגר). צפו בפרק 10 בעונה 6 של הסדרה פיוצ'רמה.

א. רשמו את עשרים החילופים המתבצעים בפרק, ובדקו שמכפלתם היא אכן מכפלת הזהות. הדרכה: היו עקביים, ורשמו בכל מקרה את הגופים המחליפים זהויות או את הזהויות המחליפות גופים.

ב. נאמר שסדרת חילופים היא נאותה אם אף חילוף אינו מופיע בה יותר מפעם אחת. בפרק, פרופסור פארנסוורת' מצהיר שכל סדרה נאותה של חילופים על  $n$  עצמים אפשר להמשיך לסדרה נאותה על  $n$  העצמים ועוד שניים, כך שמכפלת כל החילופים היא הזהות. תן דוגמה נגדית למשפט זה, אם מסתפקים ב- $n$  העצמים ועוד אחד.

ג. נסו להוכיח את המשפט.

רמזים וספויילרים בסרטון הזה מאת Mathologer וברשומה הזאת בבלוג המומלץ "לא מדויק" של גדי אלכסנדרוביץ'.

בהצלחה!