תרגול 11 מבנים אלגבריים

7 ביוני 2021

1 אידאלים

הגדרה: R חוג, $I \leq R$ תת־חוג נקרא אידאל אם הוא מקיים בליעה:

$$\forall i \in I, r \in R : ir \in I \wedge ri \in I$$

תרגילים:

1. האם הבא אידאל:

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \forall i : a_i \in \mathbb{Q} \right\} \trianglelefteq \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix} \mid \forall i : a_i \in \mathbb{Q} \right\} = R$$

פתרון: מבחינת תת־חוג: קל לראות שזוהי תת־חבורה חיבורית. מבחינת סגירות לכפל: באופן כללי, כפל של משולשיות מאותו סוג נשאר כזה, ואם האלכסון 0 הוא נשאר כך:

$$\begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

בליעה: תהי $A \in R, B \in I$, נראה ש־ $AB, BA \in I$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1b_1 & a_1b_2 + a_2b_3 \\ 0 & 0 & a_4b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

הערה: ניתן היה לדלג על בדיקת סגירות לכפל, כי בדיקת הבליעה כוללת בתוכה גם סגירות לכפל.

2. יהי R חוג חילופי. נסמן ב־ N את קבוצת האיברים הנלפוטנטיים:

$$N = \{r \in R \mid \exists m \in \mathbb{N} : r^m = 0\}$$

הוכיחו: $N \trianglelefteq R$.

פתרון: את העובדה שמדובר בתת־חוג תראו בשיעורי הבית (כלומר, מופיע בתרגיל 8 שאלה 5 שהסכום והכפל של ניל' הוא ניל', השאר ברור יותר). נראה בליעה: יהי $a \in N, b \in R$, אזי: קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש־ $a^m = 0$, ולכן:

$$(ba)^m = (ab)^m = a^m b^m = 0 \cdot b^m = 0$$

כאשר המעברים הראשון והשני נובעים מחילופיות החוג.

3. יהי $I \trianglelefteq R$. הוכיחו: $I[x] \trianglelefteq R[x]$.

פתרון: לדוגמא. ניתן להסתכל על $2\mathbb{Z}[x] \trianglelefteq \mathbb{Z}[x]$.

תת־חוג. מכיון ש־I חוג, נקבל ש־ $I[x]$ גם חוג. כי ראינו שלכל חוג S מתקיים ש־ $S[x]$ חוג.

לגבי בליעה: יהי $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = f(x) \in I[x], \sum_{i=0}^{m} b_i x^i = g(x) \in R[x]$ כאשר $a_i \in I, b_i \in R$. אזי:

$$fg = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^{k} \underbrace{(a_i b_{k-i})}_{\in I} \right) x^k$$

וכיון שהמקדם הוא סכום של איברים מ־I נקבל שהמקדם איבר ב־I, ובסה"כ: $fg \in I[x]$. באותו אופן:

$$gf = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^{k} \underbrace{(b_i a_{k-i})}_{\in I} \right) x^k$$

וכיון שהמקדם הוא סכום של איברים מ־I נקבל שהמקדם איבר ב־I, ובסה"כ: $gf \in I[x]$.

4. שימו לב: כאשר מדברים על אידאל, חשוב לדעת מה החוג שבו רוצים ש־I יהיה אידאל. לדוגמא, בתרגיל הראשון ראינו ש־

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \forall i : a_i \in \mathbb{Q} \right\} \trianglelefteq \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix} \mid \forall i : a_i \in \mathbb{Q} \right\} = R$$

אם ניקח $S=\mathbb{Q}^{3\times 3}$, אז אמנם I יהיה תת־חוג, אך לא יהיה אידאל ב־S כי לא תהיה בליעה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & b_2+b_3 \end{pmatrix} \notin I$$

2 ראשוניות בחוג השלמים והפולינומים

הגדרות: איבר $p\in\mathbb{Z}$ ייקרא ראשוני אם מתקיים:

$$\forall a,b\in\mathbb{Z}: p|ab \Rightarrow p|a \vee p|b$$

איבר $a\in\mathbb{N}$ ייקרא פריק אם קיימים c,d כך ש־ $1<c,d<a$:

$$a=cd$$

ייקרא אי־פריק אם הוא לא פריק.