תרגיל 3

22 באוגוסט 2017

1. תהי A קבוצה ו־$R\subseteq S$ יחסים מעליה. הוכיחו או הפריכו:
א. אם S לא סימטרי אז R לא סימטרי.
ב. אם S אנטי סימטרי אז R אנטי סימטרי.

2. א. בקבוצה $\{2,3,4,...,999,1000\}$ הסדורה חלקית לפי $|$ (מחלק ללא שארית) ישנם בדיוק 500 איברים מקסימליים. מהם? נמקו.
ב. רשמו 10 איברים מינימליים בקבוצה סדורה זו. נמקו.
ג. האם יש בקס"ח זו איבר קטן ביותר או איבר גדול ביותר? אם כן, מהם? אם לא, הוסיפו 2 מספרים לקבוצה שימלאו תפקידים אלו. מה יהיו האיברים המינימליים והמקסימליים בקס"ח המורחבת? נמקו.

3. תהי A קבוצה ויהי R יחס סדר חלקי על A.
א. נגדיר את היחס ההופכי של R על A בצורה הבאה: $R^{-1}=\{(b,a)\mid(a,b)\in R\}$.
הוכיחו כי R^{-1} יחס סדר חלקי.
ב. תהי $B\subseteq A$ נגדיר $S=R\cap(B\times B)$ הוכיחו כי S הוא יחס סדר חלקי על B.

4. הוכיחו או הפריכו:
א. A קבוצה, R יחס סדר חלקי מעל A. אם $a\in A$ איבר מינימלי יחיד ו־ $b\in A$ איבר מקסימלי יחיד, אזי $a=b$.
ב. A קבוצה סופית, R יחס סדר חלקי מעל A. אם $a\in A$ איבר מינימלי יחיד אז a הוא איבר קטן ביותר ב־A.

5. האם הפונקציות הבאות הן חח"ע? על? נמקו.
א. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ המוגדרת ע"י $f(n)=|n|$.
ב. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=x^3$.
ג. $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י: $f(n,m)=2^n\cdot 3^m$.
ד. תהי A קבוצה ו־$f:P(A)\to P(A)$ פונקציה המוגדרת לפי $f(B)=A\setminus B$.
ה. תהי A קבוצה לא ריקה, $B\subset A$ (מוכל ממש) תת קבוצה, ו־$f:P(A)\to P(B)$ פונקציה המוגדרת לפי $f(C)=C\cap B$.
ו. תהי A קבוצה לא ריקה, $B\subset A$ (מוכל ממש) תת קבוצה, ו־$f:P(B)\to P(A)$

פונקציה המוגדרת לפי $f(C)=C\cup(A\setminus B)$.
ז. $f:P(\mathbb{N})\to\mathbb{N}$ המוגדרת ע"י: $f(\phi)=1$, ולכל $A\neq\phi$ מגדירים $f(A)=\min(A)$, כלומר A נשלחת לאיבר הקטן ביותר שבה (לפי יחס הסדר הרגיל).
ח. נסמן ב־ $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ את קבוצת כל הפונקציות מהטבעיים לעצמם. כלומר $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}=\{f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}|f \text{ is function}\}$. כעת ענו על השאלה עבור הפונקציה $f:\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to P(\mathbb{N})$ המוגדרת ע"י $f(g)=Im(g)$.

6. הגדרה: תהי A קבוצה ו־$\leq$ יחס סדר חלקי עליה (כלומר $(A,\leq)$ קבוצה סדורה חלקית). תהי $f:A\to A$ פונקציה. נאמר ש־f שומרת סדר אם מתקיים:

$$x\leq y \iff f(x)\leq f(y)$$

ונאמר ש־f הופכת סדר אם מתקיים:

$$x\leq y \iff f(x)\geq f(y)$$

הוכיחו:
א. אם $f:A\to A, g:A\to A$ שומרות סדר, אז ההרכבה $g\circ f$ שומרת סדר.
ב. אם $f:A\to A, g:A\to A$ הופכות סדר, אז ההרכבה $g\circ f$ שומרת סדר.
ג. אם $f:A\to A$ שומרת סדר, ו־ $g:A\to A$ הופכת סדר, אז ההרכבה $g\circ f$ הופכת סדר.

7. תהיינה A,B,C,D קבוצות לא ריקות עם פונקציות $f:A\to C, g:B\to D$. נגדיר פונקציה $f\times g:A\times B\to C\times D$ ע"י:

$$f\times g(a,b)=(f(a),g(b))$$

הוכיחו:
א. f,g חח"ע $\iff$ $f\times g$ חח"ע.
ב. f,g על $\iff$ $f\times g$ על.

8. תהיינה A,B קבוצות עם החלוקות $\{A_i\}_{i\in I},\{B_i\}_{i\in I}$. בנוסף, לכל $i\in I$ נתונה פונקציה חח"ע ועל:

$$f_i:A_i\to B_i$$

הוכיחו שקיימת פונקציה חח"ע ועל

$$f:A\to B$$