

תרגיל 10 בפונקציות מרוכבות

1. הראו כי

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 \theta} d\theta = \sqrt{2}\pi$$

2. חשבו את:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 - 2x + 5)^2} dx \quad (\text{א})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 2} dx \quad (\text{ב})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos^2 x}{(1 + x^2)^2} dx \quad (\text{ג})$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5 - 4 \cos 2\theta} d\theta \quad (\text{ד})$$

3. הראו כי

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

הדרכה: חשבו את האינטגרל הבא

$$\int_{C_N} \frac{1}{z^2 \sin \pi z} dz$$

כאשר C_N הוא ריבוע שמרכזו ב 0 ואורך צלעו $2N + 1$. לאחר-מכן הוכיחו כי

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{C_N} \frac{1}{z^2 \sin \pi z} dz = 0$$

והסיקו את הדרוש.