19.6.18

שיעור חזרה: שאלות מהמבחן לדוגמה:

- שאלה 4 מהמבחן:

תהי
$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&a^2\\1&a^2&0\end{pmatrix}$$

א. עבור אילו ערכי a המטריצה לכסינה?

תזכורת: הגדרת לכסינה A לכסינה אם ורק אם קיימת P הפיכה כך ש: $P^{-1}AP=D$.

ידוע כי המטריצה לכסינה אם ריבוי אלגברי שווה לריבוי גאומטרי.

על מנת שנקבל וע' שונים, בת"ל $\Leftarrow$ אז היא תהיה לכסינה.

הערה: אם יש ריבוי - נבדוק כל מקרה לגופו.

לדוגמה יכול להיות ערך עצמי עם ריבוי אלגברי 2 ועם ריבוי גאומטרי 2 $\Leftarrow$ נקבל וע' בת"ל)

פתרון:

$|A-\lambda I|=0$

נפתח לפי $i=1$ (שורה 1)

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\1&-\lambda&a^2\\1&a^2&-\lambda\end{vmatrix}=0 \qquad (1-\lambda)[\lambda^2-a^4]=0$$

$\Downarrow$

$\lambda_1=1 \quad \lambda_2=a^2 \quad \lambda_3=-a^2$

קיבלנו שעבור $a\neq 0,1,-1$ המטריצה לכסינה

נבדוק את המקרים בהם $a=0,1,-1$

$\leftarrow$

$a=0$

$$A-\lambda I : \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & a^2 \\ 1 & a^2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$a=0 \rightarrow \quad \lambda_1=1 \quad \lambda_2=0 \quad \lambda_3=0$

נציב ב- $A-\lambda I$ $\quad \lambda=0 \quad a=0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftarrow$$

שתי שורות אפסים
נקבל שני וקטורים בת"ל
(שני משתנים חופשיים)

לכן עבור $a=0$ היא לכסינה.

אז 0 יוצא.

נבדוק $a=1$ $\quad \lambda_1=1 \quad \lambda_2=1 \quad \lambda_3=-1$

אז נבדוק $a=1$ $\quad \lambda_1=1$ נציב

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Leftarrow$$

לא נקבל 2 שורות
אפסים.

יש שורת אפסים אחת. נקבל ו"ע אחד.

(אי אפשר לייצר עוד שורת אפסים)

לא לכסינה! נשארנו ש- $a \neq 1$ (ריבוי אלגברי 2, גיאומטרי 1)

נבדוק $a=-1$ - אותו דבר.

מסקנה, עבור $a \neq \pm 1$ המטריצה לכסינה.

ב. $a=2$ אנחנו כבר יודעים שהיא לכסינה.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&4\\1&4&0\end{pmatrix}$$

$\lambda_1=1$ $\lambda_2=4$ $\lambda_3=-4$

נמצא וקטורים עצמיים: $(A-\lambda I)v=0$

$$\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0\\1&-\lambda&4\\1&4&-\lambda\end{pmatrix}$$

נציב: $\lambda=1$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&4\\1&4&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&4\\0&5&-5\\0&0&0\end{pmatrix}$$

לפי שורה שניה $y=z=t$

$x=y-4z=-3t$ נבחר $z=-1$

$$V_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

(הערה ב-P הפוכה לא חייב לנרמל)

נציב $\lambda_2=4$

$$\begin{pmatrix}-3&0&0\\1&-4&4\\1&4&-4\end{pmatrix}\rightarrow$$

$x=0$

$y=z$

$$V_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

נציב $\lambda_2=-4$

$$\begin{pmatrix}5&0&0\\1&4&4\\1&4&4\end{pmatrix}\rightarrow$$

$x=0$

$y=-z$

$$V_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

- הוכיחו או הפריכו:

* נכפול את שני הצדדים

$$PP^{-1}AP\cdot P^{-1} = PDP^{-1}$$

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^{100} = P\cdot D\cdot \underbrace{P^{-1}P}_{I}DP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

③ הוכיחו או הפריכו: <u>(שאלה 3 מהמבחן)</u>

1. A מטריצה אורתוגונלית, אם ורק אם (אמ"ם) A^{-1} אורתוגונלית
2. מכפלה של מטריצות אורתוגונליות היא מטריצה אורתוגונלית
3. A^2 מטריצה אורתוגונלית אז A אורתוגונלית

1.

<u>מטריצה אורתוגונלית</u> P מקיימת: $PP^t = P^tP = I$

$$\Downarrow$$

כאשר P אורתוגונלית $\rightarrow$ $P^t = P^{-1}$

עלינו להוכיח אם P אורתוגונלית $\Longleftrightarrow$ P^t אורתוגונלית.

P^t אורתוגונלית: $P^t\cdot(P^t)^t = (P^t)^t\cdot P^t \overset{?}{=} I$

זה נתון מהנתון $\leftarrow$ $P^t\cdot P \overset{?}{=} P\cdot P^t = I$

ולכן P^t אורתוגונלית

וגם מהכיוון השני זה נכון, כיוון שכל המעברים שנעשו כאן הם אם ורק אם. ייתכן מקרה שצד אחד יהיה נכון וצד שני לא נכון. צריך לבדוק היטב את שני הצדדים

2. נתון P, Q אורתוגונלית

נתון:

$P: \; PP^t = P^t \cdot P = I$

$Q: \; Q \cdot Q^t = Q^t \cdot Q = I$

האם PQ אורתוגונלית

צריך להוכיח:

$(PQ) \cdot (PQ)^t = (PQ)^t \cdot (PQ) \overset{?}{=} I$

$\underbrace{P \underbrace{Q \cdot Q^t}_{I} \cdot P^t}_{I} = Q^t \underbrace{P^t \cdot P}_{I} \cdot Q = I$

כי Q אורתוגונלית

כי P אורתוגונלית

סה"כ I

3. A^2 היא מטריצה אורתוגונלית אם A אורתוגונלית - הפוך?

$^*(A^2)^t = (A^t)^2$

A^2 אורתוגונלית - מה זה אומר?

$A^2 \cdot (A^2)^t = (A^2)^t \cdot A^2 = I$

$^*\; A^2 \cdot (A^t)^2 = (A^t)^2 \cdot A^2 = I$

ניתן לראות שזה לא מתקיים.

ננסה לבדוק הפרכה.

$A = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \overset{?}{} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(לא אורתוגונלית)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

כל אחת (A) לא אורתוגונלית — אך כן אורתוגונלית