

מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

31 במאי 2016

תרגיל 8 - התפלגויות רציפות מיוחדות

1. אורך החיים של נורה מתפלג מעריכית, עם תוחלת μ . חשבו את הסיכוי שמבין שתי נורות מסוג זה, אחת תדלוק לפחות כפליים זמן מרעותה.
2. המשתנים הרציפים $T, S \sim U[0, 1]$ הם בלתי תלויים.
(א) מה הסיכוי לכך שלמשוואה $x^2 - Tx + S^2 = 0$ יש שני פתרונות ממשיים?
(ב) מה הסיכוי לכך שיש בדיוק פתרון ממשי אחד?
(ג) בהנתן שיש למשוואה פתרון ממשי אחד, מה התוחלת שלו?
3. נניח ש $X_i \sim U[0, e]$ הם משתנים מקריים רציפים, בלתי תלויים, בעלי התפלגות אחידה בקטע שצויין e הוא בסיס הלוגריתם הטבעי).
(א) תאר את ההתפלגות של $Y_i = \log(X_i)$ (הלוגריתם, כמובן, בבסיס e) ע"י פונקצית הצפיפות f_{Y_i} .
(ב) חשב את התוחלת והשונות של Y_i .
(ג) מצא מספר a כך ש- $0.95 = Pr \left\{ \prod_{i=1}^{100} X_i > a \right\}$.
4. נניח כי הפתרונות של המשוואה $x^2 + ax + b = 0$ הינם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה: $X_1 \sim U[-1, 1]$ ו- $X_2 \sim U[0, 1]$.

(א) מה ההסתברות ש: $a > b$?

(ב) בהנתן ש $a > -1$ מהי ההסתברות ש $b > 0$?

נניח עתה שבמקום X_1, X_2 ו- $b \sim U[0, 1]$ ו- $a \sim U[0, 1]$ הם המשתנים המקריים הנתונים של המשוואה הריבועית (שימו לב, שגם קודם הם היו משתנים מקריים אך מן הסתם לא ניתנו מפורשות)

(ג) חשבו את ההסתברות ש- $X_1, X_2 \in \mathbb{R}$ ושמקיים $|X_1 - X_2| < \frac{1}{2}$?

5. יהי X מ"מ המתפלג אחיד על פני $[-1, 1]$.

(א) מצא את ההתפלגות של $\sqrt{|X|}$.

(ב) מצא את ההתפלגות של $-\ln(|X|)$.

6. משקל חבילת אורז, X , מתפלג נורמלית עם תוחלת $200g$ וסטיית תקן σ . ידוע

$$P(X < 193.3) = 0.25$$

(א) מצא את סטיית התקן של התפלגות משקל החבילה.

(ב) נבחרו 100 חבילות אורז באופן אקראי. מהי שונות מס' החבילות, מתוך המאה, שמשקלן נמוך מ- $190g$?